

N° d'ordre : 336

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean HUCK

1^{re} Thèse :

INFLUENCE DE LA DISTORSION COULOMBIENNE
SUR LA PRODUCTION DE PAIRES D'ELECTRONS
PAR UN RAYONNEMENT γ PRES DU SEUIL.

2^{me} Thèse

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 18 Juin 1964 devant la Commission d'Examen

MM. A. SARAZIN

Président

G. PHILBERT

J. LAFOUCRIÈRE

Examineurs

Mlle M. MAITROT



THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean HUCK

1^{re} Thèse :

INFLUENCE DE LA DISTORSION COULOMBIENNE
SUR LA PRODUCTION DE PAIRES D'ELECTRONS
PAR UN RAYONNEMENT γ PRES DU SEUIL.

2^{me} Thèse

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 18 Juin 1964 devant la Commission d'Examen :

MM. A. SARAZIN

Président

G. PHILBERT

J. LAFOUCRIÈRE

} Examineurs

Mlle M. MAITROT

UNIVERSITÉ DE LYON

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyens Honoraires

MM. LONGCHAMRON, DOUIN, MOUSSA, GAUTHIER Henri,

Professeurs Honoraires

MM. LOCQUIN, de LARAMBERGUE, SOLLAUD, MENTZER
MOUSSA, JAFFARD, DOUIN, Henri EYRAUD, DE -
JARDIN, VIRET.

Doyen

M. BRACONNIER

Assesseurs

MM. MESNARD, BOLDIN.

Professeurs

MM. LONGCHAMRON

PRETTRE
COURTY
KUHNER
MALECOT
PARIS
AUMERAS
COLONGE
JANIN
FLANDRIN
BERNARD
DUFAY Jean
NIGON
GAUTHIER Henri
WAUTIER
CHOPIN
CUEILLERON
BRACONNIER
EYRAUD Charles
SARAZIN

Minéralogie
Chimie Industrielle
Chimie-Physique
Botanique
Mécanique rationnelle et appliquée
Chimie minérale
Chimie
Chimie organique
Physique générale
Géologie appliquée
Physique Industrielle
Astronomie
Zoologie expérimentale
Géologie générale
Zoologie
Chimie biologique
Chimie
Calcul différentiel et Intégral
Chimie-Physique appliquée
Physique Nucléaire

MM. BOLDIN

PERES
MESNARD
GRANDMONTAGNE
BOUTILLIER
LAFOUCRIERE
DREUX
TEICHNER
PAVANS de CECCATTY
MERLIN
DUFAY Maurice
FRAISSE
LUBET
PHILBERT
COHEN-ADAD
DAVID Louis
CHANEL
MAURY
DEPRAZ
GAUTHIER Jean

Microbiologie et Mycologie
Physiologie
Electronique
Physique
Minéralogie
Physique Nucléaire
Chimie organique
Chimie Industrielle
Zoologie
Chimie analytique
Physique de l'Atmosphère
Mathématiques
Physiologie
Physique Nucléaire
Chimie
Géologie générale
Psychophysiologie
Méthodes Mathématiques de la Physique
Physique Nucléaire
Chimie

Professeurs sans Chaire

MM. GAUME

FERON
LAFORGUE
LEGAY
UZAN
CHENEVOY
GINET
ASCH
MICHEL Pierre
DUCET

Physique

Mathématiques

Physique

Zoologie expérimentale S.P.C.N.

Physique S.P.C.N.

Géologie appliquée

Zoologie

Physique

Minéralogie

Biologie végétale

Maîtres de Conférences

Mlle MAITROT

Mme ERICSON

MM. GEVIN

PONASSE

J'INCAN

MARTEL

LEFEBVRE

PERNET

CHERY

BERGEON

Mlle GAUTHERON

Physique

Physique générale

Géologie générale

Mathématiques

Physique

Mécanique

Mathématiques

Mathématiques

Physique

Physique C.S.U.

Chimie biologique

MM. MATHIEU

ERBEIA

DESCOTES

PICARD Philippe

LEMOIGNE

DEMARCO

MICHEL Georges

LEBRETON

DAVID Jean

TOUSSET

FEUVRAIS Louis

PICARD Claude

SCHMITT Roger

Mécanique des Fluides

Physique

Chimie organique

Mathématiques

Botanique

Géologie générale

Biochimie

Biologie végétale

Biologie animale

Chimie propédeutique

Physique Electricité

Mathématiques

Physique M.P.C.

Maître de Conférences adjoint

M. PIERRON

Conseiller Administratif

M. BURNET

Secrétaire Principal Honoraire

M. ROUX

A LA MEMOIRE DE MON PERE

A TOUS LES MIENS

Qu'il me soit d'abord permis de saluer la mémoire de Monsieur le Professeur J. THIBAUD, dont le souvenir reste toujours aussi intact parmi ceux qui furent ses élèves.

Je remercie profondément Monsieur le Professeur A. SARAZIN qui m'a encouragé et permis d'achever le travail que j'avais commencé avant qu'il ne vienne diriger l'Institut de Physique Nucléaire de LYON.

Je ne saurais trop louer la largeur de vue, si appréciable de Monsieur le Professeur G. PHILBERT, ainsi que la compréhension qu'il a sans cesse manifestées.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur J. LAFOUCRIERE, qui s'est intéressé à ce travail.

Toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance vont à Mademoiselle M. MAITROT, Maître de Conférences, qui par ses conseils et son aide constante, a joué un rôle déterminant dans l'élaboration de cette thèse.

Je remercie vivement tous mes amis Chercheurs et Techniciens, dont le concours m'a été précieux, et tous ceux qui ont participé à l'élaboration matérielle de ce travail.

Enfin, je ne saurais oublier ma femme, auprès de laquelle j'ai toujours trouvé une aide spontanée et une affectueuse compréhension.

Ce travail a pu être effectué grâce à une bourse de Recherches que le Commissariat à l'Energie Atomique m'a généreusement accordée. Je tiens à exprimer à Monsieur le Haut Commissaire à l'Energie Atomique ma profonde reconnaissance.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SOMMAIRE

Le travail que nous présentons est une contribution à l'étude de la section efficace totale de création de paires d'électrons par un rayonnement γ dans le champ d'un noyau, près du seuil de production de ce phénomène.

Dans l'introduction, nous exposons quels ont été les différents travaux relatifs à la matérialisation de l'énergie depuis l'époque de la découverte de l'électron positif jusqu'à ces dernières années. Il en ressort que les résultats de la théorie élaborée par BETHE-HEITLER sont confirmés expérimentalement dans un certain domaine d'énergie qui ne comprend toutefois ni la région proche du seuil, ni celle des grandes énergies. Dans ce dernier cas le désaccord qui est d'ailleurs faible a pu être expliqué théoriquement. Par contre, près du seuil les résultats expérimentaux sont très fragmentaires, et une étude quantitative de la section dans ce domaine paraît nécessaire.

La première partie est réservée à l'étude théorique du problème. Dans le but de faciliter la confrontation des résultats obtenus dans le cadre de l'approximation de BORN, avec les mesures expérimentales de la section nous proposons tout d'abord une forme approchée de la section dite de BETHE-HEITLER, qui fait apparaître explicitement la valeur de l'énergie du rayonnement incident.

Nous procédons ensuite à un calcul de la section totale en n'utilisant pas l'approximation de BORN, mais en traitant le problème en interaction liée. Les éléments de matrice sont calculés en développant les fonctions d'ondes suivant une méthode d'ondes partielles, et la section est exprimée au moyen d'une série d'intégrales portant sur des produits de fonctions hypergéométriques confluentes.

L'étude expérimentale est exposée dans la deuxième partie. Nous avons étudié les variations de la section en fonction de l'énergie, entre 1,08 MeV (Rb^{86}) et 2,76 MeV (Na^{24}) en utilisant comme cible un scintillateur épais (cristal de NaI (TI)). Pour cela, nous avons d'abord réalisé un spectromètre à scintillations du type spectromètre à paires, formé par trois détecteurs et les circuits électroniques nécessaires à l'identification du phénomène et à la mesure de la section totale.

La détermination des sections par ce dispositif nous a donné des résultats en accord avec les valeurs numériques de la section établie en interaction liée, et fait apparaître sous une forme simple la loi suivant laquelle la section varie avec l'énergie dans ce domaine.

Nous montrons ensuite que cette loi de variations établie pour l'iode peut être généralisée pour des éléments quelconques, et que près du seuil de production, on peut représenter la section totale de création de paires à l'aide de la section de BETHE HEITLER et d'un terme correctif dont nous donnons la valeur en fonction de l'énergie du rayonnement incident et de la charge du noyau cible.

INTRODUCTION

I - HISTORIQUE

La découverte de l'électron positif dans le rayonnement cosmique par ANDERSON en 1932 (A Na 32) marque une étape importante dans l'histoire de la physique : le positon étant la première antiparticule à être mise en évidence expérimentalement.

ANDERSON et NEDERMEYER (ANb 33) montrent peu après que cette particule peut être obtenue à l'aide d'un phénomène entièrement nouveau où de la matière était créée à partir de l'énergie d'un rayonnement électromagnétique γ provenant du Th C".

Les auteurs des recherches suivantes s'appliquent à déterminer les propriétés de cette particule, et à montrer que les prédictions théoriques concernant son annihilation en deux quanta de moments opposés, sont vérifiées.

C'est ainsi que THIBAUD (TH 33,34) sélectionne par une méthode trochoïdale les positons créés par les γ du Th C" et identifie le rayonnement consécutif à leur absorption dans une cible, à des photons d'énergie mc^2 , et que JOLIOT (JO 33,34) obtient des résultats analogues avec les positons émis par une source radioactive artificielle.

KLEMPERER (KL 34) utilise une méthode de coïncidence pour montrer la simultanéité de l'émission de ces deux photons, puis ALICHANIAN et autres (AL 36) et BERINGER et MONTGOMERY (BE 42) montrent que les moments ne sont pas rigoureusement opposés mais ont des directions dont l'angle peut atteindre 1° .

Beaucoup plus tard LIND et LINDSTROM (LI 51) mesurent l'énergie du rayonnement d'annihilation avec une grande précision et la trouvent égale à 510,96 KeV.

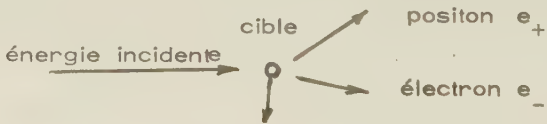
Ces travaux d'identification du positon, confirmèrent alors la théorie de DIRAC où l'apparition d'une paire d'électrons est interprétée comme la transition effectuée par une particule d'un état d'énergie totale négative à un état d'énergie positive.

Par la suite les études portèrent surtout sur le mécanisme de production de cette particule dans le processus : $\gamma + \text{noyau} \longrightarrow e_+ + e_- + \text{noyau}$, dont l'aspect quantitatif devait être décrit à partir des lois générales de l'électrodynamique quantique.

Avant d'exposer ces travaux, et de suivre leur évolution, il nous paraît indispensable de présenter la production de paires sous son aspect général, et de classer les différents domaines étudiés.

II - GENERALITES SUR LA PRODUCTION DE PAIRES D'ELECTRONS

Le processus de production le plus général est décrit par le schéma suivant :



Pour une énergie incidente donnée la description du phénomène fait intervenir trois grandeurs importantes qui sont :

- la section différentielle géométrique $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}$ donnant la distribution angulaire des électrons,

- la section différentielle énergétique $\frac{d\sigma}{dE}$ obtenue par intégration sur l'espace de la section précédente,

- la section totale $\sigma = \int \frac{d\sigma}{dE} dE$

E et Ω désignant l'énergie d'un électron (positif ou négatif) et l'angle solide dans lequel il est émis.

De plus, les différentes études, tant théoriques qu'expérimentales portent sur des domaines pouvant différer entre eux par la nature et la valeur de l'énergie incidente, ainsi que par la nature de la cible.

a) Nature de l'énergie "incidente"

La production de paires peut s'effectuer au moyen de

- rayonnement γ
- particule chargée : électron, proton, etc...
- transition entre niveaux énergétiques suffisamment éloignés.
(formation interne de paires)

Le mode de création par rayonnement γ présente un intérêt tout particulier. En effet, le cas d'une particule chargée s'y ramène : il est traité par la méthode de WEISZACKER, WILLIAMS (WE 34) dans laquelle on admet que l'interaction est due au champ électromagnétique de la particule. Il en est de même pour la formation interne de paires, où l'énergie déterminée par la transition est de nature électromagnétique.

b) La cible

Les mesures expérimentales portent en général sur l'interaction avec les atomes. On admet que celle-ci se présente sous deux formes :

- Interaction dans le champ coulombien.

L'état de l'atome n'est pas perturbé par le photon (ses électrons restent sur leur niveau) c'est le champ du noyau purement coulombien qui intervient avec éventuellement effet d'écran pour les grandes énergies du photon.

- Interaction avec les électrons périphériques de l'atome.

L'électron est arraché de son niveau, par le rayonnement γ , devient libre et c'est dans son champ qu'a lieu l'interaction. Expérimentalement on observe alors un triplet ($e_+ e_- e_-$) for-

mé par la paire d'électrons créés et l'électron-cible.

Par la suite, nous nous bornerons à exposer les travaux relatifs à la production de paires au moyen de photons, et les deux types d'interaction seront envisagés : l'interaction dans le champ d'un noyau et l'interaction dans le champ d'un électron.

III - LES TRAVAUX THEORIQUES

Les différents travaux peuvent être classés suivant les domaines étudiés mais aussi suivant les approximations théoriques employées.

- On peut utiliser la méthode des perturbations pour tenir compte du potentiel coulombien du noyau (perturbation indépendante du temps) et du champ électromagnétique (perturbation dépendant du temps). Ainsi qu'il est connu, on désigne par approximation de BORN le calcul dans lequel on considère seulement le terme perturbatif du premier ordre par rapport au potentiel ; la fonction servant de point de départ à ce calcul est évidemment la fonction d'onde de l'électron libre.

- On peut traiter le problème par la méthode des perturbations appliquée au seul champ électromagnétique. La fonction d'onde de l'électron est alors la solution de l'équation de DIRAC avec potentiel extérieur.

La première méthode est d'application beaucoup plus générale. Cependant pour être valable, il faut que le potentiel coulombien n'agisse que comme une perturbation, ce qui est exact lorsque l'énergie de l'électron est grande, mais ne l'est plus dans le domaine proche du seuil.

a) Production de paires dans le champ d'un noyau.

1 - Résultats obtenus par l'approximation de BORN (1er ordre)

La théorie la plus complète est celle de BETHE et HEIT-

LER (BE 34) qui donnent la section différentielle géométrique et énergétique dans un champ coulombien fixe (le recul du noyau est négligé) résultat également obtenu par RACAH (RA 34). Le champ est pur ou avec effet d'écran, et dans ce dernier cas, l'atome est décrit par le modèle de THOMAS-FERMI. La section totale n'est donnée sous forme explicite que dans le cas ultrarelativiste.

HOUGH (HO 48) donne une formule d'approximation de la section de BETHE et HEITLER. JOST et autres (JO 50) calculent la distribution du recul du noyau et la section totale.

FRASER (FR 52) étudie l'importance du facteur de forme atomique sur la section de BETHE HEITLER. Il montre que l'emploi du modèle de HARTREE conduit à des résultats équivalents à ceux du modèle de THOMAS-FERMI.

BJORKEN et autres (BJ 58) utilisent le formalisme de FEYNMAN (FE 61). Leurs calculs tenant compte des corrections radiatives et du facteur de forme du proton déterminé par BUMILLY et autres (BU 57) sont appliqués à l'hydrogène, pour déterminer la répartition des positons émis à 90° d'un faisceau γ de 140 MeV et la section correspondant à l'équipartition de l'énergie entre les deux électrons émis à 30° . La différence avec la section de BETHE HEITLER est faible, et semble due principalement au recul du proton, HUCK (HU 59) donne une expression approchée de la section totale, de BETHE et HEITLER.

2 - Autres résultats

NISHINA et autres (NI 34) obtiennent la forme de la section totale pour un noyau léger, et dans les limites ultrarelativiste et non relativiste. Les fonctions d'ondes sont solutions de l'équation de DIRAC avec potentiel coulombien.

JAEGER HULME (JA 36) utilisent les fonctions de DARWIN (DA 28) obtenues par une méthode de décomposition

en ondes partielles, et calculent la section totale dans le plomb aux énergies de $3 mc^2$ et $5,2 mc^2$.

BETHE et MAXIMON (BE 52) calculent la section différentielle dans le cas ultra relativiste, en décrivant les états initiaux et finaux par des fonctions d'onde de FURRY et autres (FU 34) et DAVIES et BETHE (DA 52-54) donnent la section totale correspondante et montrent que la correction à l'approximation de BORN est faible, et sensiblement proportionnelle à Z^2 .

OLSEN, MAXIMON, WERGELAND (OL 57) utilisent des fonctions d'ondes différentes suivant l'importance du recul du noyau, employant en cela une technique plus générale utilisée pour des problèmes de diffusion par MOLIERE (MO 57) LANDAU (LA 58) et peuvent ainsi calculer une section différentielle à haute énergie.

b) Production de paires dans le champ d'un électron

La production de paires dans le champ d'un électron se différencie de la production dans le champ d'un noyau par :

- le recul important de l'électron, qui modifie à la fois l'aspect cinématique du problème et donne lieu à des effets retardés.
- l'effet d'échange entre l'électron cible et l'électron de la paire.

- le seuil de création : $4 mc^2$ au lieu de $2 mc^2$

A cause des difficultés d'établir une section générale, les études portent surtout sur les cas limites énergie ultra relativiste et près du seuil, et utilisent l'approximation de BORN. C'est ainsi qu'il faut mentionner les travaux de :

NEMIROVSKY (NE 47) près du seuil

BORSELLINO (BO 47) et VOTRUBA (VO 48)

WATSON (WA 47) aux grandes énergies,

WHEELER et LAMB (WH 39)

JOSEPH et ROHRLICH (JO 58) dans le cas général d'électrons libres et liés.

IV - LES TRAVAUX EXPERIMENTAUX

Les travaux expérimentaux relatifs à la production de paires d'électrons par un rayonnement γ portent sur les différentes sections de ce phénomène à des énergies très diverses, et utilisent principalement les techniques de la spectrométrie magnétique aux grandes énergies (supérieures à 10 MeV), la méthode d'absorption à des énergies moyennes (10 MeV), et les propriétés d'annihilation électron-positon en 2 quanta aux énergies plus basses (quelques MeV) région où la section de création de paires est faible par rapport à la section totale d'absorption du rayonnement.

Nous exposons les résultats obtenus, par ordre chronologique :

ALICHANIAN et autres (AL 35) constatent une dissymétrie dans la distribution énergétique des positons créés dans le plomb par le rayonnement γ du Th C", dissymétrie inexplicable dans l'approximation de BORN, mais dont rend compte la théorie de JAEGER HULME (JA 36).

ADAMS (AD 48) étudiant l'absorption des rayonnements γ à des énergies de 10 à 20 MeV dans différents éléments, trouve pour le plomb une section plus faible que celle de BETHE HEITLER (BE 34).

Les auteurs suivants confirment les corrections à l'approximation de BORN calculées par BETHE, DAVIS, MAXIMON etc.... (BE 52, DA 52, DA 54, OL 57) en mesurant la section dans un domaine d'énergie très vaste :

LAWSON (LA 49) à 88 MeV. Les électrons préalablement déviés par un champ magnétique sont détectés à l'aide d'un faisceau de compteurs Geiger.

WALKER (WA 49) à 17,6 MeV (spectromètre à paires ma-

gnétique).

DEWIRE et autres (DE 51) jusqu'à 280 MeV (spectromètre magnétique).

EMIGH (EM 52) entre 50 et 300 MeV à la chambre de WILSON, ROSENBLUM et autres (RO 52) associent des scintillateurs à un spectromètre à paires magnétique. Leurs mesures sont faites à 5,3 10,3 et 17,6 MeV.

BERMAN (BE 53) obtient des résultats en accord avec les précédents à 19,5 MeV.

On note ensuite une orientation des travaux vers des énergies plus basses.

DAVISSON EVANS (DA 51) et COLGATE (CO 52) étudient la section totale d'absorption du rayonnement γ , et montrent que l'accord entre les valeurs expérimentales de la section totale de création de paires et les valeurs théoriques de BETHE HEITLER est excellent entre 4 et 8 MeV environ.

GRIFFITHS WARREN (GR 52) utilisent un spectromètre à scintillation pour déterminer le rapport des sections totales de création de paires dans l'iode à 1,33 et 1,17 MeV.

Les auteurs suivants trouvent que la section expérimentale dans le plomb aux énergies inférieures à 3 MeV est supérieure aux prévisions théoriques calculées par l'approximation de BORN:

HAHN et autres (HA 52) entre 2 et 3 MeV

SCHMID (SC 55) à 2,76 MeV

SHKOLNIK STANDIL (SH 57) aux environs de 2 MeV

JENKINS (JE 56), STANDIL (ST 57) à 1,12 MeV.

D'autre part, le rapport de la section expérimentale à la section de BETHE HEITLER suit une variation linéaire en Z^2 dont le coefficient de proportionnalité est mesuré par :

HAHN et autres (HA 52), DAYTON (DA 53), SCHMID HUBER (SC 54) WEST (WE 56), STANDIL SHKOLNIK (ST 58)

à 1,33 et 1,17 MeV (Co^{60}) et par DAYTON (DA 53) à 2,62 MeV.

HUCK (HU 58) donne un rapport des sections à 1,33 et 1,17 MeV plus faible que celui de GRIFFITHS WARREN.

Le domaine des grandes énergies n'est cependant pas abandonné, mais reste au contraire l'objet d'études récentes. BRABANT et autres (BR 57) mesurent la section à 2,5 GeV. Les paires créées sont détectées par des compteurs Cerenkov.

SANDHU et autres (SA 62) étudient la distribution angulaire des électrons créés dans une émulsion nucléaire par des X d'énergie variant jusqu'à 90 MeV. Ils constatent que la courbe expérimentale se place entre les valeurs théoriques de BETHE et celles de BORSELLINO (BO 47).

V - SYNTHÈSE DES RÉSULTATS THÉORIQUES ET EXPERIMENTAUX

La comparaison des résultats expérimentaux aux différentes théories permet de distinguer, pour la section totale dans le champ d'un noyau, trois domaines d'énergie intéressants :

1°) Pour les énergies supérieures à 10 MeV et jusqu'à 300 MeV au moins, la correction à l'approximation de BORN est négative et petite :

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = -1,5 \cdot 10^{-5} Z^2$$

Ce résultat est en accord avec la théorie de BETHE MAXIMON et autres (BE 52, DA 54) employant des fonctions d'ondes relativistes qui tiennent compte de la distorsion coulombienne.

2°) Pour les énergies comprises entre 5 et 10 MeV, l'approximation de BORN donne des résultats en plein accord

avec l'expérience.

3°). Pour des énergies plus faibles, l'approximation de BORN est de moins en moins valable.

Dans cette région proche du seuil, les renseignements que nous possédons sur la section sont :

- Les calculs théoriques de la section totale dans le plomb par JAEGER HULME (JA 36) aux deux énergies $k = 5,2$ et $k = 3$ (exprimées en unité mc^2)

- Les résultats expérimentaux dans le plomb dont la plupart sont donnés à des énergies voisines de 2 MeV ($k=4$) et les variations de la section en fonction de Z à deux énergies seulement, dont la plus basse est obtenue par le rayonnement du Co^{60} .

On peut remarquer que ces résultats sont fragmentaires et qu'aucune loi n'a été proposée pour relier la section à l'énergie du rayonnement γ , ce qui s'explique facilement puisqu'ils se situent en majorité entre 2 et 3 MeV, région où le désaccord avec la section de BETHE HEITLER dans le plomb, n'est guère supérieur à la précision des mesures.

Ceci fait évidemment ressortir l'intérêt des résultats à des énergies inférieures à 2 MeV, et c'est pourquoi la recherche de la forme que peut avoir la section en fonction des deux paramètres qui déterminent le processus, c'est à dire l'énergie du rayonnement et la charge du noyau Z , nous a conduit à entreprendre une étude systématique dans un domaine d'énergie très proche du seuil : $0 \leq k - 2 \leq 1$.

C'est cette étude menée à la fois sur le plan théorique et sur le plan expérimental, que nous allons exposer maintenant.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE THÉORIQUE

1 ère PARTIE CHAPITRE I

ASPECT THEORIQUE

L'étude d'un phénomène tel que la création de paires d'électrons par un rayonnement γ dans un champ coulombien est un problème dont la résolution s'effectue dans le cadre de l'électrodynamique quantique. La théorie de l'électrodynamique quantique est actuellement exposée le plus souvent à partir d'un formalisme lagrangien très général, et elle se caractérise par l'utilisation d'une technique particulièrement adaptée, celle des diagrammes de FEYNMAN. Cependant, elle s'est développée initialement à l'aide d'un formalisme hamiltonien conduisant à l'introduction d'états dits "états intermédiaires", et c'est par cette méthode (BE 34) dont nous esquisserons les grandes lignes que BETHE HEITLER ont mené les calculs conduisant à l'établissement de la section de création de paires.

Quel que soit le formalisme employé, le traitement du potentiel extérieur est d'ailleurs le même, et deux méthodes sont possibles :

- le potentiel agit seulement comme une perturbation (approximation de BORN au 1er ordre) et provoque des transitions entre états libres.
- le potentiel n'est pas considéré comme une perturbation, et les états ne sont plus libres.

I - "FORMALISME HAMILTONIEN" DE L'ELECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

1 - Le champ de photons

La quantification du champ électromagnétique est effectuée à partir d'une description hamiltonienne du champ classique, dans laquelle les variables canoniques considérées comme opérateurs sont soumises à des règles de commutation.

Pour cela, après avoir introduit les potentiels $\vec{A}$ et ϕ dans les équations de MAXWELL, on développe $\vec{A}$ (lorsque le champ est pur et n'a pas de composante statique ($\phi = 0$ $\text{div } \vec{A} = 0$)) suivant des ondes planes transversales $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ dont les amplitudes sont solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{r}) &= \sum_{\lambda} (q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) + q_{\lambda}^*(t) \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r})) \\ (I-1) \quad \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2}} \vec{e}_{\lambda} e^{i(\vec{k}_{\lambda} \cdot \vec{r})} \quad |\vec{k}_{\lambda}| = \frac{\nu_{\lambda}}{c} \\ q_{\lambda}(t) &= |q_{\lambda}| e^{-i\nu_{\lambda} t} \\ \vec{e}_{\lambda} &\text{ vecteur polarisation de l'onde } \lambda \end{aligned}$$

L'énergie H_{λ} de l'onde plane λ s'exprime alors au moyen des variables canoniques réelles P_{λ} et Q_{λ} :

$$\begin{aligned} (I-2) \quad H_{\lambda} &= \frac{1}{2} (P_{\lambda}^2 + \nu_{\lambda}^2 Q_{\lambda}^2) \quad \begin{aligned} Q_{\lambda} &= q_{\lambda} + q_{\lambda}^* \\ P_{\lambda} &= -i\nu_{\lambda} (q_{\lambda} - q_{\lambda}^*) \end{aligned} \end{aligned}$$

Après quantification, P_{λ} et Q_{λ} sont des opérateurs satisfaisant aux relations de commutation :

$$\begin{aligned} (I-3) \quad [P_{\lambda}, Q_{\lambda}] &= P_{\lambda} Q_{\lambda} - Q_{\lambda} P_{\lambda} = -i\hbar \\ [P_{\lambda}, Q_{\mu}] &= [P_{\lambda}, P_{\mu}] = 0 \quad \lambda \neq \mu \end{aligned}$$

On montre que Q_{λ} peut être représenté par une matrice hermitique dont les éléments ne sont différents de zéro que pour les transitions dans lesquelles $n_{\lambda} \rightarrow n_{\lambda} \pm 1$ (absorption ou émission d'un photon)

$$(1-4) \quad \begin{aligned} Q_{n,n+1} &= Q_{n+1,n}^* = \sqrt{\frac{\hbar (n+1)}{2\nu}} \\ Q_{n,n'} &= 0 \quad n' \neq n \pm 1 \end{aligned}$$

q_λ et q_λ^* sont les opérateurs d'absorption et d'émission du photon. L'hamiltonien H se met alors sous la forme:

$$(1-5) \quad H = \sum_\lambda H_\lambda = \sum_\lambda n_\lambda \hbar \nu_\lambda$$

Lorsque le champ est quelconque ($\text{div } \vec{A} \neq 0$) on peut toujours décomposer $\vec{A}$ en deux parties $\vec{A}_1$ ($\text{div } \vec{A}_1 = 0$) et $\vec{A}_2$ ($\vec{A}_2 = \text{grad } \theta$) et le développement de $\vec{A}$ comprend alors des ondes transversales ($\vec{A}_1$) et longitudinales ($\vec{A}_2$).

Quoique la théorie soit faite dans le cas général ; nous nous restreindrons au cas particulier où les potentiels sont définis dans la jauge de Coulomb ($\text{div } \vec{A} = 0$) ce qui a l'avantage d'éliminer les ondes longitudinales.

2 - Le champ d'électrons

L'électron est décrit par l'équation de DIRAC :

$$(1-6) \quad i \hbar \dot{\Psi} = H \Psi = \left(\alpha (\vec{p} - e \vec{A}) + \beta mc^2 + e \phi \right) \Psi$$

dont les solutions libres sont de la forme :

$$(1-7) \quad \Psi = u e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} - i \frac{E}{\hbar} t}$$

On peut procéder à la quantification de Ψ (deuxième quantification) par une méthode analogue à celle de A, en développant $\Psi(t)$ suivant les solutions libres indépendantes du temps et en séparant les énergies positives et négatives..

Cependant lorsque le nombre de particules est limité, comme dans la création d'un électron et d'un positon, le formalisme de la deuxième quantification n'est pas indispensable, et il revient au même d'utiliser la théorie des trous, auquel cas la

fonction d'onde de l'électron n'est pas quantifiée, et la création est interprétée comme la transition effectuée par un électron d'un état d'énergie négative à un état d'énergie positive.

3 - Interaction photons - électrons

Un système d'électrons et de photons est décrit par un vecteur état Ψ qui en représentation de SCHRÖDINGER obéit à l'équation :

$$(1-8) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$$

L'hamiltonien H comprend 3 parties relatives à l'énergie des photons, des électrons et à l'énergie d'interaction :

$$(1-9) \quad H = H_{\text{rad.}} + H_{\text{el.}} + H_i$$

Dans la jauge de Coulomb, les différents hamiltoniens ont la forme :

$$(1-10) \quad \begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \sum_{\lambda} n_{\lambda} \hbar \nu_{\lambda} \\ H_{\text{el.}} &= \int \Psi^* (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc^2) \Psi d\tau \\ H_i &= -e \int \Psi^* (\vec{\alpha} \vec{A}) \Psi d\tau \end{aligned}$$

Lorsque le système est placé dans un champ extérieur (champ coulombien dans le cas du phénomène de création de paires) l'influence de ce dernier peut être traitée de deux façons suivant que le potentiel extérieur est inclus dans $H_{\text{el.}}$ ou dans H_i . Dans tous les cas on résout l'équation (1-8) dans la représentation d'interaction en traitant H_i par la méthode des perturbations.

Pour cela on développe $\Psi(t)$ suivant les états propres Ψ_n de H_0 .

$$(1-11) \quad \Psi(t) = \sum_n b_n(t) \Psi_n$$

$$(I-12) \quad H_0 = H_{\text{rad.}} + H_{\text{el.}}$$

n caractérise le système d'électrons et de photons dans son ensemble, par exemple un électron dans un état a et n_λ photons sont décrits par un vecteur état Ψ_n donné par :

$$(I-13) \quad \Psi_n = \Psi_{n_\lambda} \Psi_a(\vec{r})$$

La méthode des perturbations dépendant du temps (au 1er ordre) permet alors de calculer la probabilité de transition d'un état initial o à un état final n dont le nombre de photons diffère d'une unité seulement ($\Delta n_\lambda = \pm 1$)

$$(I-14) \quad \frac{1}{t} \left| b_n(t) \right|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} \left| H_{n10} \right|^2 \delta(E_n - E_o)$$

Si les états o et n diffèrent de plus d'un photon il s'introduit des états intermédiaires n' , n'' etc qui diffèrent d'un photon. La probabilité de transition (I-14) conserve la même forme mais avec un nouvel élément de matrice qui dans le cas $\Delta n_\lambda = +2$ par exemple est donné par :

$$(I-15) \quad K_{n10} = \sum_{n'} \frac{H_{n1n'} H_{n'10}}{E_o - E_{n'}} \quad E_o - E_{n'} \neq 0$$

On peut expliciter les éléments de matrice correspondant aux transitions : $0 \equiv \dots b \dots, n_\lambda \dots \rightarrow n \equiv \dots a \dots, n_\lambda \pm 1 \dots$

$$(I-16) \quad \begin{aligned} H_{a, n_\lambda | b, n_\lambda + 1} &= -e \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2 c^2 (n_\lambda + 1)}{K_\lambda}} \int \Psi_a^*(\vec{r}) e^{i \vec{K}_\lambda \vec{r}} \Psi_b d\tau \\ H_{a, n_\lambda + 1 | b, n_\lambda} &= -e \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2 c^2 (n_\lambda + 1)}{K_\lambda}} \int \Psi_a^*(\vec{r}) e^{-i \vec{K}_\lambda \vec{r}} \Psi_b d\tau \end{aligned}$$

Ψ_a et Ψ_b sont les solutions propres de $H_{\text{el.}}$.

Nous avons déjà dit que le potentiel coulombien pouvait être inclus ou non dans $H_{\text{el.}}$. La poursuite des calculs peut alors s'effectuer suivant deux voies différentes :

a) Le potentiel coulombien est inclus dans H_e . (Interaction dite "liée")

Les fonctions Ψ_a et Ψ_b sont alors solutions de l'équation de DIRAC avec potentiel extérieur

$$(1-17) \quad H \Psi = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc^2 + e \phi) \Psi$$

Ce procédé est général et n'implique aucune hypothèse restrictive sur ϕ . Les seules transitions existant sont dues à l'interaction entre les électrons (soumis à l'influence du potentiel) et les photons.

Cette méthode a été employée par JAEGER et HULME. La complexité des calculs est alors reportée sur l'expression mathématique des fonctions Ψ .

b) Le potentiel coulombien est inclus dans H_v . (Interaction dite "libre")

Les fonctions Ψ_a et Ψ_b sont alors les solutions libres de l'équation de DIRAC :

$$(1-18) \quad H \Psi = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc^2) \Psi$$

et elles ont alors une forme mathématique très simple (ondes planes).

Le potentiel extérieur (coulombien) est aussi traité par la méthode des perturbations, et selon l'usage nous appelons approximation de BORN celle qui consiste à le traiter au 1er ordre. Dans ce cas, il provoque des transitions entre états libres, dont les éléments de matrice sont donnés par la théorie de la diffusion coulombienne.

Puisque l'hamiltonien d'interaction est traité par la méthode des

perturbations, il faut évidemment que le potentiel extérieur soit susceptible d'un tel traitement, ce qui implique l'hypothèse supplémentaire que l'énergie potentielle des électrons soit petite par rapport à l'énergie totale.

C'est cette méthode qui a été utilisée par BETHE HEITLER et les résultats obtenus ne sont alors valables que dans un certain domaine qui est limité par les conditions dites de l'approximation de BORN.

II - LES RESULTATS OBTENUS PAR L'APPROXIMATION DE BORN

1 - Section de BETHE HEITLER (BE 34)

La création d'une paire d'électrons d'énergies E_+ et E_- et d'impulsions $\vec{p}_+$ et $\vec{p}_-$ dans le champ coulombien d'un noyau de charge Ze , par un photon d'énergie k est interprétée comme l'absorption d'un photon par un électron d'énergie $E_0 = -E_+$ et d'impulsion $\vec{p}_0 = -\vec{p}_+$ et apparaît ainsi comme le processus inverse du bremsstrahlung.

Le potentiel coulombien ϕ est traité comme une perturbation. Deux types de transitions sont à envisager :

- celles dues au seul champ électromagnétique : absorption du photon avec conservation de l'impulsion.
- celles dues au potentiel coulombien, pour lesquelles l'état de la radiation reste inchangé, tandis que l'impulsion de l'électron est modifiée.

Une transition $0 \rightarrow F$ passe donc par un état intermédiaire, de deux façons possibles I et II, suivant l'ordre dans lequel on considère les interactions dues à ϕ et celles dues à $\vec{A}$:

$0 \rightarrow I$ Le photon est absorbé et communique son impulsion à l'électron :

$$\vec{p}_0 \rightarrow \vec{p}^I = \vec{p}_0 + \vec{k} \quad (H_{I110} \neq 0)$$

$I \rightarrow F$ L'électron est diffusé par le potentiel coulombien,

et acquiert une impulsion $\vec{p}$:

$$\vec{p}^I \longrightarrow \vec{p} \quad (V_{FI} \neq 0)$$

0 $\rightarrow$ II L'électron est d'abord diffusé par le potentiel coulombien, et acquiert une impulsion $\vec{p}^{II}$:

$$\vec{p}_0 \rightarrow \vec{p}_{II} = \vec{p} - \vec{k} \quad (V_{II0} \neq 0)$$

II $\rightarrow$ F Le photon est ensuite absorbé, et l'électron possède alors une impulsion $\vec{p}$

$$\vec{p}^{II} \longrightarrow \vec{p} + \vec{k} = \vec{p} \quad (H_{IFII} \neq 0)$$

Les éléments de matrice correspondant à l'absorption du photon sont calculés à partir de la forme générale de H_I (I-16), ceux correspondant à la diffusion de l'électron sont calculés d'après l'approximation de BORN (du 1er ordre) appliquée à la diffusion coulombienne par un noyau infiniment lourd :

$$(I-19) \quad V_{a|b} = \frac{4\pi\hbar^2 c^2}{|\vec{p}_a - \vec{p}_b|^2} e^2 \sum (u_a^* u_b) \quad |\vec{p}_a| = |\vec{p}_b|$$

On obtient ainsi 4 éléments de matrice donnés par (I-20)

$$(I-20) \quad \begin{aligned} H_{I0} &= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2 c^2}{k}} (u^* \vec{\alpha} \vec{e} u_0) & V_{FI} &= \frac{Ze^2 4\pi\hbar^2 c^2}{|\vec{p}^I - \vec{p}_0|^2} (u^* u^I) \\ V_{II0} &= \frac{Ze^2 4\pi\hbar^2 c^2}{|\vec{p} - \vec{p}_0|^2} (u^* u_0) & H_{FII} &= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2 c^2}{k}} (u^* \vec{\alpha} \vec{e} u^{II}) \end{aligned}$$

u et u^* sont les spineurs de l'électron libre de DIRAC.

L'élément de matrice associé à la transition 0 $\rightarrow$ F s'obtient après sommation $\sum$ sur les directions de spin des états intermédiaires :

$$(I-21) \quad K_{F|0} = \sum \left(\frac{V_{FI} H_{I0}}{E_I - E_0} + \frac{H_{FII} V_{II0}}{E_0 - E_{II}} \right)$$

La probabilité de transition est donnée par :

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} \left| K_{F0} \right|^2 p_F$$

$$p_F = p_{E_+} \cdot p_{E_-} \cdot dE + (\text{densité d'états finaux})$$

La section $\frac{d^2\sigma}{dE d\Omega}$ différentielle s'obtient alors en divisant ω

par c et l'intégration suivant les angles permet d'obtenir $d\sigma/dE_+$ où $p_{\pm}$ sont maintenant des scalaires $p_{\pm} = \left| \vec{p}_{\pm} \right|$

$$(1-22) \quad \frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{1}{k^3} \left\{ -\frac{4}{3} p_+ p_- - 2 E_+ E_- \frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+ p_-} + E_+ \xi_- \frac{p_+}{p_-^2} \right. \\ \left. - \xi_+ \xi_- + E_- \xi_+ \frac{p_-}{p_+^2} + M \left(k^2 \left(\frac{E_+^2 + E_-^2 - E_+ E_-}{p_+^2 p_-^2} - 1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8}{3} E_+ E_- - \frac{k}{2} \left(\frac{E_+ E_- - p_-^2}{p_-^2} \xi_- + \frac{E_+ E_- - p_+^2}{p_+^2} \xi_+ \right) \right) \right\}$$

Avec :

$$\xi_{\pm} = 2 \operatorname{Log} (E_{\pm} + p_{\pm}) \quad M = 2 \operatorname{Log} \frac{E_+ E_- + p_+ p_- + 1}{k}$$

Les unités d'énergie d'impulsion et de section étant respectivement : mc^2 , mc , $\bar{\psi} = Z^2 r_0^2 \alpha$

$$r_0 \text{ rayon de l'électron} : r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \\ \alpha \text{ constante de structure fine} : \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

La section différentielle (1-22) est établie en utilisant les éléments de matrice de la diffusion coulombienne (1-19) calculés dans l'approximation de BORN, ce qui n'est légitime que lorsque la vitesse des électrons est suffisamment grande et vérifie l'inégalité dite de BORN :

$$(1-23) \quad \alpha Z \ll \beta_{\pm}$$

$\beta_{\pm}$ étant la vitesse de l'électron (positon) en unité c

Pour que cette condition soit remplie, il faut évidemment que l'énergie des électrons soit supérieure à une certaine limite :

$$E_{\pm} = (1 - \beta_{\pm}^2)^{-\frac{1}{2}} > (1 - \alpha^2 Z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et il en résulte une limitation inférieure de l'énergie du photon qui crée la paire d'électrons :

$$k = E_{+} + E_{-} > 2 (1 - \alpha^2 Z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

La théorie ne s'applique donc, pour une énergie incidente donnée, qu'aux noyaux dont la charge est inférieure à une certaine valeur, par ailleurs d'autant plus faible que k est plus petit. Inversement pour un noyau donné, elle n'est valable que pour des énergies du photon suffisamment grandes (fig.1-1).

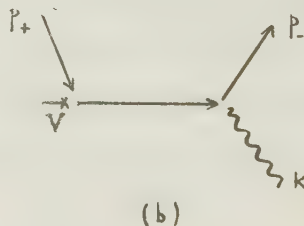
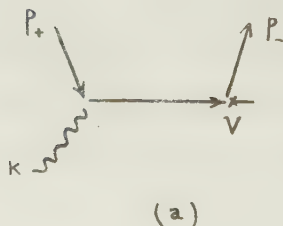
Remarques

a) Formalisme de FEYNMAN (FE 61)

Le traitement du problème par le formalisme de FEYNMAN aboutit au calcul des éléments de matrice correspondant à deux graphes (a) et (b) (interaction libre)

(a) le photon crée une paire, puis l'électron interagit avec le champ du noyau

(b) le photon crée une paire, puis le positon interagit avec le champ du noyau



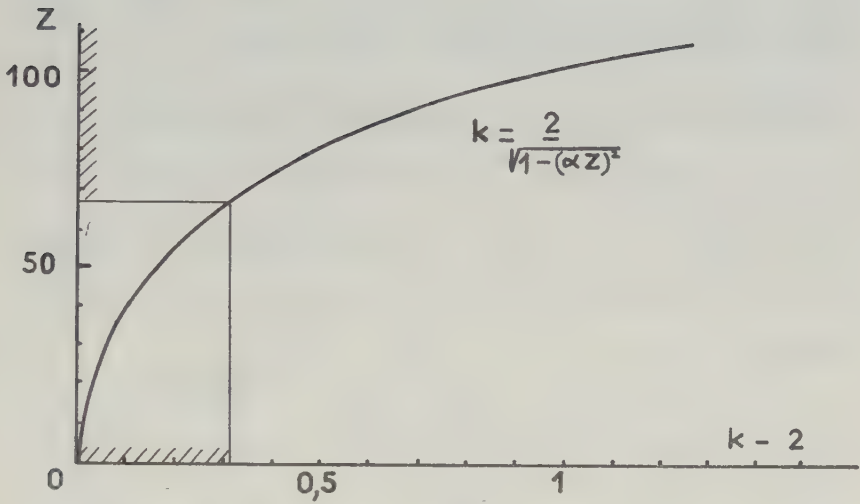


Fig.1-1 - Les régions hachurées sont celles où l'approximation de Born n'est pas légitime.

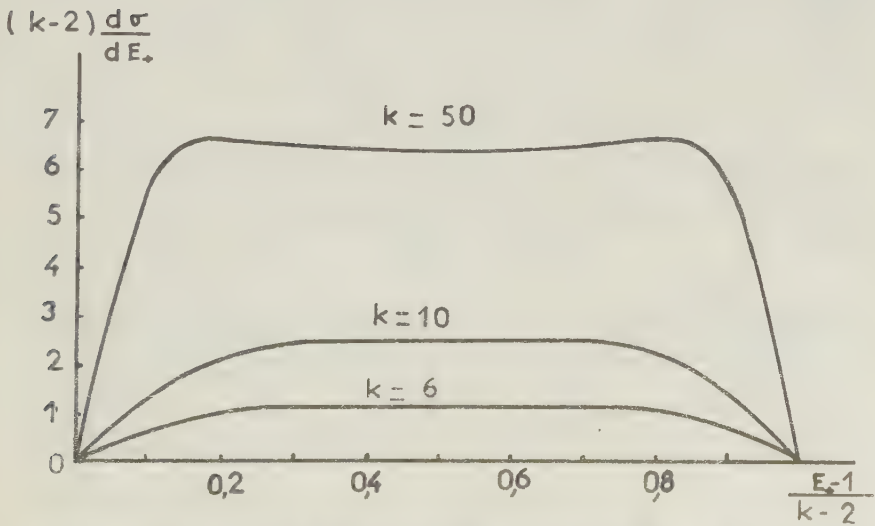


Fig.1-2 - Variations de la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{dE}$ en fonction de l'énergie, pour différentes valeurs de k .

Ces graphes décrivent aussi les deux interactions (0 I F) et (0 II F). A noter cependant que dans l'interaction (b) la diffusion s'applique au positon, tandis que dans (0 II F) c'est l'électron d'énergie totale négative qui est dévié.

b) Influence de l'effet d'écran. Limite ultra relativiste

La section (I-22) a été calculée pour un potentiel coulombien pur $\frac{Ze}{r}$. Lorsque la création a lieu dans un champ atomique, il faut tenir compte de l'effet d'écran dû aux électrons de l'atome, ce qui modifie le potentiel dont la nouvelle valeur est donnée par : $\phi = \frac{Ze}{r} \exp(-a \cdot r)$

Bien entendu si le phénomène de matérialisation se produit seulement dans une région proche du noyau et d'étendue faible par rapport aux dimensions atomiques, on peut alors considérer que le potentiel est pur, et la section est donnée par (I-22).

BETHE et HEITLER ont montré que cette hypothèse était justifiée lorsque la condition (I-24) était vérifiée :

$$(I-24) \quad \frac{2 E_+ \cdot E_-}{k} \gg \frac{Z^{-1/3}}{\alpha}$$

ce qui implique une limitation supérieure de l'énergie du photon

$$(I-24') \quad k \ll 2 \frac{Z^{-1/3}}{\alpha}$$

Pratiquement la relation (I-24') est toujours vérifiée lorsque l'énergie du rayonnement γ ne dépasse pas quelques MeV. Les variations de la section différentielle (I-22) en fonction de l'énergie du positon créé, sont représentées pour différentes valeurs de k, sur la figure I-22 (Pour $k > 10$ la section différentielle est calculée en tenant compte de l'effet d'écran). La section totale s'obtient par intégration numérique de la section différentielle. Cependant pour les grandes énergies, l'approximation ultra relativiste est valable :

$$E^2 \simeq p^2$$

La section différentielle (I-22) se simplifie et devient :

$$(I-25) \quad \frac{d\sigma}{dE} \simeq \frac{4}{k^3} \cdot (E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3} E_+ E_-) \text{Log} \left(\frac{2 E_+ E_-}{k} - \frac{1}{2} \right)$$

et la section totale ultra relativiste s'exprime analytiquement en fonction de l'énergie k suivant :

$$(I-26) \quad \sigma = \frac{28}{9} \text{Log } 2k - \frac{218}{27} \quad k \gg 2$$

2 - Section totale

En général, la section différentielle (I-22) ne peut s'intégrer que numériquement (sauf dans le cas ultra relativiste). Cependant il existe des expressions de la section totale calculée par RACAH (RA 33), puis par JOST et autres (JO 48) en utilisant la relation de BOHR - PEIERLS - PLACZECK, soit :

$$(I-27) \quad \begin{aligned} \sigma(q) = & 2q^2 \left[2C_2(q) - D_2(q) \right] - \frac{2}{2.7} \left[(109 + 64q^2) E_2(q) \right. \\ & \left. - (67 + 6q^2)(1 - q^2) F_2(q) \right] \end{aligned}$$

F et E désignant les intégrales elliptiques de 1ère et 2ème espèce, avec : $q = 2k^{-1} \leq 1$

$$(I-28) \quad \begin{aligned} C_2(q) &= \int_1^{1/q} \frac{\text{Arg ch } x}{x} \frac{\text{Arg ch } \frac{1}{qx}}{qx} dx & D_2 &= \int_1^{1/q} \frac{\text{Arg ch } \sqrt{qx}}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \\ E_2(q) &= F(\sqrt{1 - q^2}) - E(\sqrt{1 - q^2}) & F_2(q) &= F(\sqrt{1 - q^2}) \end{aligned}$$

Nous n'insisterons pas sur ce résultat, car les coefficients étant exprimés sous forme d'intégrales, le calcul numérique de σ n'est pas plus rapide au moyen de (I-27) que par l'utilisation de (I-22).

3 - Approximation de HOUGH

Il est certain que l'emploi de l'expression (1-22) pour déterminer les valeurs numériques de la section totale, n'est pas des plus pratiques, puisqu'il faut d'abord calculer la section différentielle point par point, puis procéder à l'intégration, c'est ce qui a incité HOUGH à rechercher directement une expression approchée de la section totale.

La figure 1-2 montre que les courbes (pour les valeurs de k inférieures à 50) présentent un palier très étendu dans lequel la section différentielle diffère très peu de la section

$\frac{d\sigma}{dE} \left(\frac{k}{2} \right)$ correspondant à l'équipartition de l'énergie du rayonnement entre les deux électrons, et suggère ainsi l'existence d'une relation simple entre σ et $\frac{d\sigma}{dE} \left(\frac{k}{2} \right)$.

HOUGH a donc exprimé la section différentielle en fonction du paramètre $\psi_0 = (k-2) \frac{d\sigma}{dE} \left(\frac{k}{2} \right)$, ce qui lui a permis de proposer pour la section totale, la relation :

$$(1-29) \quad \sigma(k) = \begin{cases} 0,776 \psi_0 + 0,0180 \psi_0^2 & k > 4,2 \\ 0,785 \psi_0 & k < 4,2 \end{cases}$$

Cette expression fournit une bonne approximation dans tous les domaines d'énergie, et permet d'ailleurs d'atteindre l'approximation ultra relativiste (1-26).

Sans contester l'intérêt pratique de cette relation utilisée par la suite par la plupart des expérimentateurs, il nous faut cependant souligner que le rôle particulier joué par la section différentielle $\frac{d\sigma}{dE} \left(\frac{k}{2} \right)$ est arbitraire et ne repose sur aucune base physique. Dans une mesure expérimentale directe de la section totale par exemple, les seules grandeurs qui interviennent sont l'énergie du rayonnement γ et la charge Ze du noyau, sans qu'à aucun moment on n'ait à considérer ou mesurer une quelconque section différentielle.

Aussi nous a-t-il semblé intéressant de chercher une expression approchée de la section totale qui fasse intervenir uniquement les seuls paramètres qui déterminent la production de paires d'électrons dans le champ d'un noyau c'est à dire k et Z .

La recherche et l'établissement d'une telle relation font l'objet du chapitre II (1ère Partie)

III - LES RESULTATS INDEPENDANTS DE L'APPROXIMATION DE BORN

Nous avons déjà vu que le potentiel coulombien pouvait ne pas être traité par la méthode des perturbations auquel cas il n'existe que les transitions dues au seul champ électromagnétique, transitions qui ont lieu non plus entre états libres, mais entre états solutions de l'équation de DIRAC avec potentiel coulombien :

$$H \Psi = (\alpha \vec{p} + \beta mc^2 + e \phi) \Psi \quad \phi = \frac{Ze}{r}$$

Il n'y a pas eu de résultats généraux, comparables à ceux de BETHE HEITLER, par exemple, obtenus par cette méthode.

JAEGER et autres (JA 33) ont calculé quelques valeurs numériques de la section totale, tandis que NISHINA et autres (NI 33) étudiaient la section dans les cas particuliers où les électrons créés possèdent une énergie soit très grande, soit très faible.

1 - Section totale de NISHINA et autres (NI 33)

Ces auteurs indiquent qu'ils utilisent les solutions de l'équation (I-17) mais n'en précisent toutefois pas la forme explicite.

Lorsque les particules créées sont très énergiques, la section est identique à celle obtenue par BETHE HEITLER

pour la limite ultra relativiste (1-26).

Dans le domaine non relativiste ($\beta_{\pm} \ll 1$) la section a l'expression :

$$(1-30) \quad \sigma_{N.R.} = \frac{\pi^2 (\alpha Z)^2}{8} \left(\frac{32}{3} (k-2) + (\alpha Z)^2 \left(\frac{\pi^2}{2} + 4 \right) \right) \int_0^{\sqrt{2(k-2)}} \frac{\beta_+ d\beta_+}{e^{\frac{2\pi\alpha Z}{\beta_+} - 1} (1 - e^{-\frac{2\pi\alpha Z}{\beta_-}})}$$

avec les deux conditions :

$$\alpha Z \ll 1 \quad \beta_{\pm} \ll 1$$

Pour évaluer l'intégrale I qui entre dans l'expression (1-30) il est commode de la mettre sous la forme suivante :

$$(1-31) \quad I = (k-2) \int_0^1 \frac{dt}{(e^{\frac{u}{\sqrt{t}} - 1} (1 - e^{-\frac{u}{\sqrt{1-t}}}))} \quad u = \frac{2\pi\alpha Z}{\sqrt{2(k-2)}}$$

Lorsque l'inégalité de BORN est satisfaite, ce qui dans le domaine non relativiste ne peut l'être qu'avec des noyaux très légers, I se calcule aisément et la section prend une forme qui nous le verrons (1-47) est bien identique à la limite de la section de BETHE HEITLER près du seuil :

$$(1-32) \quad I \simeq \frac{k-2}{u^2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{k-2}{u^2} \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$\sigma \simeq \frac{\pi}{12} (k-2)^3 \quad \text{Avec : } \alpha Z \ll \beta_{\pm} \ll 1$$

Par contre si l'inégalité de BORN n'est pas vérifiée et nous avons vu que pour un noyau donné quel qu'il soit (fig. 1-1) il existe toujours un domaine d'énergie suffisamment proche du seuil, où elle ne l'est pas, I prend une valeur entièrement différente :

$$I \simeq (k-2) \int_0^1 e^{-\frac{u}{\sqrt{t}}} dt \quad \text{Avec : } \beta_{\pm} \ll \alpha Z \ll 1$$

On peut effectuer l'intégration en introduisant la fonction exponentielle intégrale $E_1(u)$ et l'on obtient :

$$(1-33) \quad I \approx 2 (\pi \alpha Z)^2 \left(-E_i(-u) - \frac{e^{-u}}{u^2} (u-1) \right) - E_i(-u) = \int_u^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$$

Il en résulte que dans ce cas la courbe représentative de $\sigma_{N.R.}$ admet un contact singulier à l'origine ($k = 2$) dû à la forme exponentielle du facteur I :

$$(1-34) \quad \sigma_{N.R.} \approx \exp \left(- 2 \pi \alpha Z / \sqrt{k-2} \right)$$

et que de plus $\sigma_{N.R.} \ll \sigma_B \quad \beta_+ \ll \alpha Z$

Cependant le domaine de validité de cette approximation est très restreint, même pour un noyau très lourd ($\alpha Z \sim 0,6$). Si l'on admet que la vitesse des électrons ne doit pas dépasser le dixième de la vitesse de la lumière par exemple (afin que la condition $\beta_+ \ll 1$ soit vérifiée), l'énergie k du rayonnement est alors limitée par :

$$k-2 = \frac{1}{2} (\beta_+^2 + \beta_-^2) \leq \frac{1}{100} \quad (\approx 5 \text{ KeV})$$

Dans un tel domaine, la section est très faible :

$$\sigma \approx 10^{-31} \text{ cm}^2/\text{at. pour une énergie de } 15 \text{ KeV } (Z=53)$$

et il semble pratiquement impossible de la mesurer expérimentalement.

2 - Section de JAEGER HULME (JA 33)

Ces auteurs utilisent la décomposition des solutions de l'équation de DIRAC (1-17) suivant des harmoniques sphériques (DA 28).

Dans ces conditions les transitions n'ont plus lieu entre un état $(E', \vec{p}')$ et un état $(E, \vec{p})$ mais entre un état (E', ℓ', m') et un état (E, ℓ, m) . Les nombres ℓ, m , caractéristiques de l'état considéré sont évidemment introduits par les harmoniques sphériques, et les éléments de matrice se calculent d'après (1-16) et sont de la forme :

$$(1-35) \int \Psi^*(E, \ell, m) (\vec{a} \cdot \vec{e}) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \Psi(E', \ell', m') d\tau$$

La section totale s'en déduit par application de (1-14) :

$$(1-36) \quad \sigma = \frac{2\pi c e^2}{\nu} \int_{-1-k}^{-1} dE' \sum_{\substack{\ell, m \\ \ell', m'}} \left| \int \Psi^*(E, \ell, m) (\vec{a} \cdot \vec{e}) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \Psi(E', \ell', m') d\tau \right|^2$$

La difficulté de calculer cette expression provient de la forme compliquée de $\Psi(E, \ell, m)$ dont les composantes Ψ_i sont de la forme :

$$(1-37) \quad \begin{aligned} \Psi_1 &= F(r) Y_\ell^m & \Psi_2 &= F(r) Y_\ell^{m+1} \\ \Psi_3 &= G(r) Y_{\ell+1}^m & \Psi_4 &= G(r) Y_{\ell+1}^{m+1} \end{aligned}$$

Les fonctions radiales F et G sont solutions du système (1-38) :

$$(1-38) \quad \begin{aligned} (E+1 + \frac{\alpha Z}{r}) G_\ell &= - \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r} \right) F_\ell \\ (E-1 + \frac{\alpha Z}{r}) F_\ell &= \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r} \right) G_\ell \end{aligned}$$

JAEGER et HULME ont calculé les éléments de matrice correspondant aux transitions effectuées à partir de l'état fondamental $\ell' = m' = 0$, et après diverses approximations numériques ont calculé σ pour $k = 3$ dans le plomb.

$$(1-39) \quad \sigma(3) = 0,67 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad Z = 82$$

JAEGER a ensuite calculé $\sigma(3)$ pour deux autres valeurs de Z , ce qui l'a conduit à proposer par extrapolation la relation suivante :

$$(1-40) \quad \sigma(3) = \left(0,95 \left(\frac{Z}{137} \right)^2 + 2,54 \left(\frac{Z}{137} \right)^4 \right) 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{at.}$$

On voit ainsi que cette méthode a permis à ces auteurs d'obtenir des valeurs numériques de la section, mais qu'il ne leur a pas été possible d'établir suivant quelle loi variait la section différentielle ou la section totale.

Nous nous sommes cependant proposés d'étudier les possibilités qu'offrait cette méthode pour l'établissement d'une expression où k et Z apparaîtraient dans la section de façon explicite, et c'est cette étude que nous exposons dans le chapitre III (1ère Partie)

1ère PARTIE CHAPITRE II

EXPRESSION DE LA SECTION DE BETHE HEITLER
(INTERACTION LIBRE) EN FONCTION DE L'ENERGIE
DU RAYONNEMENT γ

La matérialisation de l'énergie dans un champ coulombien dépend de deux grandeurs k et Z , et il est donc utile de pouvoir exprimer les différentes mesures relatives à ce phénomène, telle que la section totale par exemple, sous une forme où k et Z apparaissent de façon explicite.

Remarquons alors que dans l'approximation de BORN, la section différentielle (exprimée en unité $\bar{\psi}$) ne comprend que des expressions indépendantes de Z , dans lesquelles interviennent seulement les impulsions et les énergies des électrons libres. Il en résulte que $\frac{d\sigma}{dE}$ qui ne dépend de Z que par l'intermédiaire de $\bar{\psi}$ est proportionnelle à Z^2 puisque :

$$(1-41) \quad \bar{\psi} = r_0^2 \propto Z^2$$

Ceci résulte de l'emploi de l'approximation de BORN : le potentiel extérieur n'intervient comme une perturbation que dans la diffusion coulombienne (et l'élément de matrice est alors proportionnel à Z (1-19)) tandis qu'il n'agit pas sur l'absorption du photon (1-20).

Le problème est ainsi simplifié et le but de l'étude que nous proposons est d'exprimer σ en fonction de k seulement.

I - EXPRESSION DES SECTIONS DIFFERENTIELLE ET TOTALE EN FONCTION DE k

Deux voies sont alors possibles : soit travailler directement sur l'expression de la section totale (I-27) soit au contraire exprimer d'abord la section différentielle $\frac{d\sigma}{dE}$ (I-22) en fonction de k, et en déduire la forme de σ .

Nous avons vu que la section différentielle (I-22) se simplifiait dans le cas ultra relativiste et que son intégration pouvait alors être résolue au moyen de fonctions élémentaires où l'énergie k apparaît explicitement (I-25). D'une façon analogue nous avons cherché les simplifications pouvant intervenir dans (I-22) lorsque l'énergie des électrons est faible.

Il est commode d'introduire le paramètre t ($0 \leq t \leq 1$) mesurant le rapport de l'énergie cinétique du positon $E_+ - 1$ et de l'énergie cinétique totale disponible $k - 2$:

$$(I-42) \quad E_+ = 1 + t (k - 2)$$

$$E_- = 1 + (1 - t) (k - 2)$$

On peut alors développer tous les termes de (I-22) suivant les puissances de $(k - 2)$, en tenant compte de la relation liant l'énergie et l'impulsion :

$$(I-43) \quad E_{\pm}^2 = 1 + p_{\pm}^2$$

En se bornant à l'ordre 3, on démontre que la section différentielle a la forme :

$$(I-44) \quad \frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{1}{k^3} \frac{16}{3} (k-2)^2 \sqrt{1-t} \left(1 + (k-2) \left(\frac{2}{15} t^2 + \frac{2}{15} t + \frac{1}{10} \right) + \dots \right)$$

Cette expression peut maintenant s'intégrer par rapport

à t :

$$\sigma = \int_1^{k-1} \frac{d\sigma}{dE_+} dE_+ = (k-2) \int_0^1 \frac{d\sigma}{dE_+} dt$$

car elle conduit au calcul des intégrales suivantes :

$$(1-45) \quad \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt = \frac{\pi}{2^3} \quad \int_0^1 (1-t^2) \sqrt{t(1-t)} dt = \frac{3\pi}{2^4}$$

et la section totale (en unité $\bar{\psi}$) prend la forme :

$$(1-46) \quad \sigma(k) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{k-2}{k} \right)^3 \left(1 + \frac{k-2}{8} + \dots \right)$$

- Limite près du seuil

L'expression (1-46) montre que la courbe représentative de σ a un contact d'ordre 3 à l'origine ($k=2$) :

$$(1-47) \quad \sigma \approx \frac{\pi}{12} (k-2)^3 \quad k-2 \ll 1$$

- Comparaison avec la formule de HOUGH

La section différentielle correspondant à l'équipartition de l'énergie entre les électrons, s'obtient à l'aide de (1-44) pour $t = \frac{1}{2}$

$$(1-48) \quad \frac{d\sigma}{dE_+} \left(\frac{k}{2} \right) = \frac{8}{3k^3} (k-2)^2 \left(1 + \frac{2}{15} (k-2) \right) = \frac{\psi_0}{k-2}$$

La comparaison avec l'expression de la section totale (1-46) :

$$\sigma = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{k-2}{k} \right)^3 \left(1 + \frac{2}{16} (k-2) \right)$$

permet de retrouver le résultat de HOUGH (I-29) pour les petites valeurs de k :

$$\sigma \simeq \frac{2\pi}{8}(k-2) \frac{d\sigma}{dE_+} \left(\frac{k}{2} \right) = 0,785 \Psi_0$$

- Prolongement jusqu'au domaine ultra relativiste

La relation (I-46) est d'autant plus exacte que l'on se rapproche du seuil ; mais il se trouve que la convergence du développement proposé est très rapide, et qu'ainsi l'introduction d'un seul terme correctif supplémentaire permet de prolonger sa validité jusqu'aux valeurs de k pour lesquelles l'approximation ultra relativiste est valable :

$$(I-49) \quad \sigma(k) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{k-2}{k} \right)^3 \left\{ 1 + \frac{k-2}{8} - \left(\frac{k-2}{400} \right)^2 \right\}$$

Le tableau I-1 permet de comparer quelques valeurs de la section totale obtenues par intégration numérique de la section différentielle (I-22) de BETHE HEITLER, au moyen de la formule de HOUGH (I-29) et en utilisant la relation (I-49)

k	3	4	6	10	20
HEITLER (I-22)	0,085	0,32	0,89	1,94	3,75
HOUGH (I-29)	0,0876	0,326	0,909	1,97	3,69
HUCK (I-49)	0,087	0,32	0,90	1,95	3,73

TABLEAU I - 1

On constate ainsi que l'écart maximum entre les valeurs obtenues par (I-49) et par (I-22) est d'environ 10^{-2} .

La valeur de σ calculée d'après (I-22) est certainement trop faible pour $k = 3$. A cette énergie en effet, les valeurs de la section différentielle $\frac{d\sigma}{dE} \left(\frac{3}{2} \right)$ calculée d'après (I-22) et (I-49) diffèrent de moins de $0,3 \cdot 10^{-2}$:

$$\frac{d\sigma}{dE_+} \left(\frac{3}{2} \right) = \begin{cases} 0,1116 & \text{d'après (I-22)} \\ 0,1119 & \text{d'après (I-49)} \end{cases}$$

et une précision du même ordre devrait être obtenue pour $\sigma(3)$; aussi adopterons nous la valeur 0,087 obtenue par (1-49).

II - APPLICATIONS DE LA RELATION (1-49)

Les variations de la section $\sigma(k)$ calculée d'après (1-49) sont représentées sur les figures 1-3 et 1-4, en unité $\bar{\varphi}$.

Pour un noyau Z quelconque, la section est obtenue par multiplication par $\bar{\varphi} = \alpha r_0^2 Z^2 = 5,795 Z^2 10^{-28} \text{ cm}^2$

Notre étude expérimentale devant s'effectuer en utilisant des molécules de Na I, nous avons aussi représenté la section dans l'iode pour les valeurs de k inférieures à 2,8 (fig; 1-5).

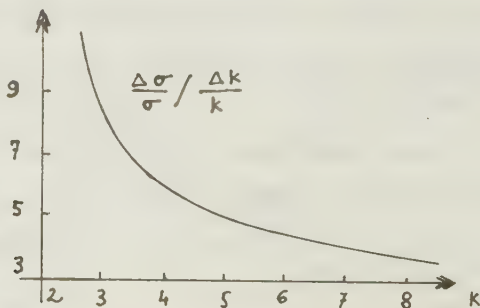
La contribution du sodium à la section est faible par rapport à celle de l'iode ($< 4 \cdot 10^{-2}$) on a en effet :

$$\bar{\varphi}_I = 1,6278 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{at.} \quad \bar{\varphi}_{Na} = 0,0701 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{at.}$$

La relation (1-46) a d'autre part l'avantage de mettre en relief le rôle que joue la précision avec laquelle est connue l'énergie du rayonnement γ , dans une détermination expérimentale de la section. En considérant seulement le premier terme de (1-46) on voit que :

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{3k}{k-2} \cdot \frac{\Delta k}{k}$$

Une erreur relative $\Delta k/k$ sur l'énergie du photon, qui en général est assez faible, entraîne, à cause du facteur $6/(k-2)$, une erreur sur σ qui peut devenir très importante près du seuil. (Fig. 1-6).



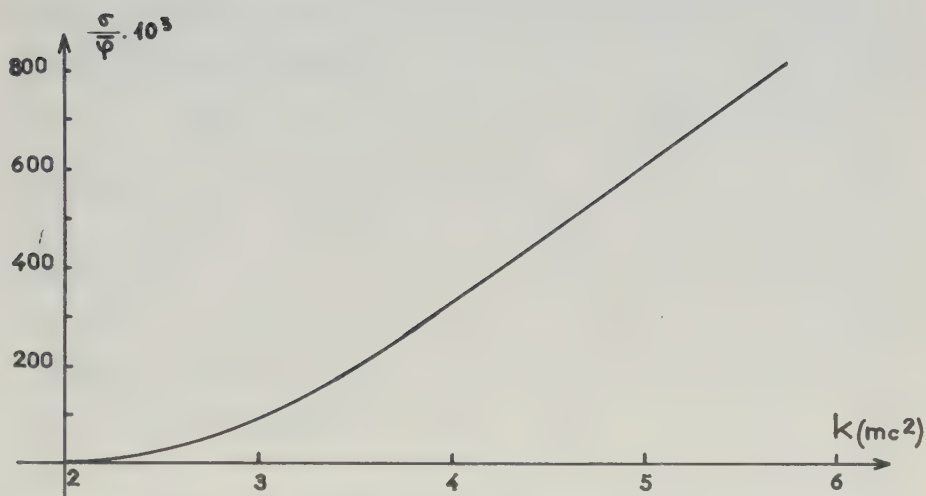


Fig. I-3 - Variations de la section efficace totale de création de paires en fonction de l'énergie k du rayonnement γ

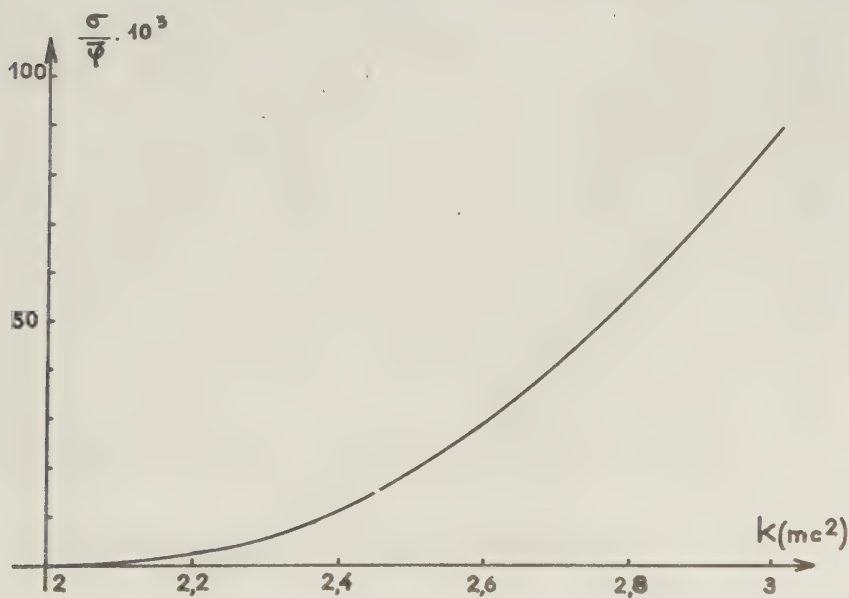


Fig. I-4 - Variations de la section efficace totale près du seuil.

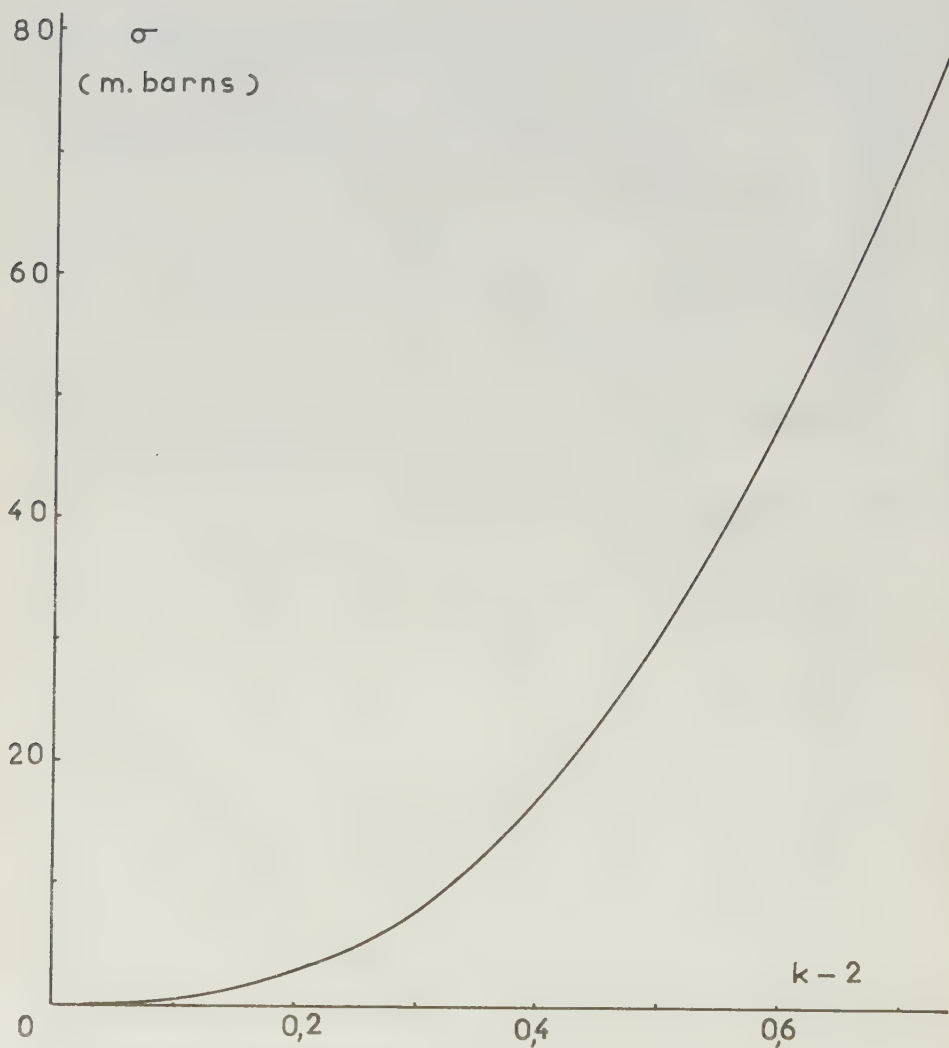
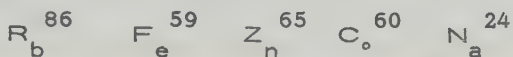


Fig. 1-5 - Variations de la section efficace totale de création de paires d'électrons dans l'iode, près du seuil.

Pour cette raison, nous avons calculé (tableau I-II) les sections correspondant aux différentes énergies des rayonnements émis par les isotopes que nous avons utilisés pour effectuer notre étude expérimentale :



en tenant compte des différences existant à l'heure actuelle entre les diverses mesures de l'énergie (DZHELEPOV , PECKER (DZ 61)). C'est ainsi que l'énergie du rayonnement γ du Zn^{65} qui est connue avec une bonne précision $\frac{\Delta k}{k} \approx 0,5 \cdot 10^{-2}$ conduit à une section présentant un écart considérable $\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = 15 \cdot 10^{-2}$ suivant l'énergie adoptée.

Section efficace totale de création de paires dans I et Na I

Emetteurs	E (MeV)	k (mc ²)	σ (φ)	σ_I (millibarns)	$\sigma_{N,1}$ (millibarns)
⁸⁶ Rb	1,080	2,114	3,259 10 ⁻⁴	0,53	0,55
⁵⁹ Fe	1,098	2,149	7,102 10 ⁻⁴	1,15	1,206
	1,100	2,153	7,661 10 ⁻⁴	1,25	1,300
	1,110	2,172	1,062 10 ⁻³	1,73	1,803
⁶⁵ Zn	1,120	2,192	1,441 10 ⁻³	2,35	2,446
	1,170	2,290	4,402 10 ⁻³	7,17	7,47
⁶⁰ Co	1,172	2,294	4,576 10 ⁻³	7,45	7,77
	1,280	2,505	1,822 10 ⁻²	29,66	30,93
⁵⁹ Fe	1,289	2,523	1,985 10 ⁻²	32,3	33,70
	1,300	2,544	2,184 10 ⁻²	35,6	37,08
	1,325	2,593	2,687 10 ⁻²	43,7	45,62
⁶⁰ Co	1,330	2,603	2,794 10 ⁻²	45,5	47,44
	1,380	2,7	3,969 10 ⁻²	64,6	67,39
²⁴ Na	2,760	5,4	7,297 10 ⁻¹	1,190 10 ³	1,239 10 ³

TABLEAU I - II

1ère PARTIE CHAPITRE III

ETUDE DE LA SECTION EN INTERACTION LIEE, PAR
UNE METHODE D'ONDES PARTIELLES

La première partie de notre étude théorique nous a permis d'exprimer la section de BETHE HEITLER sous une forme où k et Z apparaissent de façon explicite (1-46).

Il serait évidemment intéressant de pouvoir établir une relation analogue, lorsque l'approximation de BORN n'étant pas valable il faut résoudre le problème de la matérialisation, dans le cadre de l'interaction liée.

Dans ce but, nous avons suivi la méthode de décomposition en ondes partielles utilisée par JAEGER HULME, pour l'établissement de la section (1-36) en recherchant les approximations susceptibles de faire ressortir nettement la contribution des facteurs k et Z .

La situation est d'ailleurs beaucoup plus complexe et défavorable que dans le cas de l'approximation de BORN, car nous devons alors travailler directement sur les éléments de matrice du type (1-16) avant leur intégration, et non plus sur une section déjà établie en fonction d'autres variables (1-22). De plus, alors que le paramètre Z jouait précédemment un rôle très simple (loi en Z^2) il intervient maintenant d'une façon implicite dans les fonctions d'ondes.

Nous avons d'abord montré que l'intégration angulaire pouvait être réalisée effectivement pour toutes les transitions et qu'elle conduisait à des résultats plus simples lorsque l'état initial est fondamental (1-78, 1-79).

Le problème qui se pose est alors de pouvoir résoudre l'intégration radiale, et pour cela nous avons orienté notre effort sur l'étude des fonctions radiales que nous avons exprimées comme combinaison de fonctions hypergéométriques confluentes à coefficients et variables complexes (fonctions de KUMMER).

Nous avons ensuite utilisé une décomposition des fonctions de KUMMER suivant les fonctions de BESSEL établie par TRICOMI (TR 60), ce qui permet d'exprimer l'amplitude de la probabilité de transition comme l'intégrale de produits de fonctions de BESSEL. On constate alors que les coefficients qui interviennent sont complexes, et que l'allure de leur variation avec k et Z , dans un domaine où ni l'approximation ultra relativiste ni l'approximation non relativiste ne sont valables, ne fait pas entrevoir de simplifications souhaitables. Il nous a donc fallu abandonner la tentative d'établir la section sous une forme analytique approchée, et nous nous sommes contentés de calculer une valeur numérique dans le domaine où a porté notre étude expérimentale.

I - DEVELOPPEMENT DES FONCTIONS D'ONDES SUR LES HARMONIQUES SPHERIQUES

L'hamiltonien de DIRAC est invariant par rotation et réflexion, et on démontre qu'il est possible de construire les fonctions propres communes à J^2 , J_z et P (moment total, et parité) en utilisant des harmoniques sphériques (MESSIAH (ME 59)).

Pour expliciter ces fonctions, nous écrivons d'abord l'équation de DIRAC, sous la forme (I-50) où les unités d'énergie et de longueur sont l'énergie de masse mc^2 de l'électron

et la longueur d'onde Compton $\lambda_0 = \frac{h}{mc}$

$$(I-50) \quad \left[\sum_{\alpha} \alpha_{\alpha} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \right) + \beta \right] \Psi = \left(E - \frac{\alpha Z}{r} \right) \Psi$$

Les matrices α_i et β sont les matrices de DIRAC définies par (I-51) :

$$(I-51) \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il est commode d'introduire les opérations différentielles $D_{\pm}$ et D_z :

$$(I-52) \quad D_{\pm} = i \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad D_z = i \frac{\partial}{\partial z}$$

ce qui permet d'écrire (I-50) sous forme d'un système (I-53) d'équations différentielles relatives aux composantes Ψ_i

$$(I-53) \quad \begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{B^2 - \frac{\alpha Z}{r}} \left(D_- \Psi_4 + D_z \Psi_3 \right) & \Psi_3 &= \frac{-1}{A^2 + \frac{\alpha Z}{r}} \left(D_- \Psi_2 + D_z \Psi_1 \right) \\ \Psi_2 &= \frac{1}{B^2 - \frac{\alpha Z}{r}} \left(D_+ \Psi_3 - D_z \Psi_4 \right) & \Psi_4 &= \frac{-1}{A^2 + \frac{\alpha Z}{r}} \left(D_+ \Psi_1 - D_z \Psi_3 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } A^2 = E + 1 \quad B^2 = 1 - E$$

L'expression des opérateurs $D_{\pm}$ et D_z en coordonnées sphériques, ainsi que les relations de récurrence entre les fonctions de Legendre $P_\ell^m(z)$:

$$(I-54) \quad P_\ell^m(z) = (1-z^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dz^{|m|}} P_\ell(z) \quad P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2-1)^\ell$$

permet de démontrer les propriétés (I-55) des opérateurs D appliqués à des produits de fonctions $f(r)$ par des harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \theta)$

$$(I-55) \quad \begin{aligned} D_+ f(r) Z_\ell^m &= \frac{z}{2\ell+1} \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{z}{r} \right) f Z_{\ell+1}^{m+1} - (\ell-m)(\ell-m-1) \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r} \right) f Z_{\ell-1}^{m+1} \right] \\ D_- f(r) Z_\ell^m &= \frac{z}{2\ell+1} \left[- \left(\frac{d}{dr} - \frac{z}{r} \right) f Z_{\ell+1}^{m-1} + (\ell+m)(\ell+m+1) \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r} \right) f Z_{\ell-1}^{m-1} \right] \end{aligned}$$

$$D_2 f(r) Z_\ell^m = \frac{1}{2\ell+1} \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r} \right) f Z_{\ell+1}^m + (\ell+m)(\ell-m) \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r} \right) f Z_{\ell-1}^m \right]$$

Avec :

$$Z_\ell^m = (\ell - |m|)! Y_\ell^m \quad \ell = \begin{cases} +1 & m \geq 0 \\ -1 & m < 0 \end{cases}$$

La comparaison de (I-53) et (I-55) montre, compte tenu de l'orthogonalité des harmoniques sphériques, que les composantes Ψ_i ne peuvent être décomposées sous la forme $f_i(r) Y_{\ell_i}^{m_i}$ que si les conditions (I-56) sont vérifiées :

$$(I-56) \quad \begin{aligned} m_1 = m_3 = m & & \ell_1 = \ell_2 = \ell \\ m_2 = m_4 = m + 1 & & \ell_3 = \ell_4 = \ell \pm 1 \end{aligned}$$

Il existe donc deux types de solutions (I-58) dont on montre (ME 59) qu'elles correspondent aux deux valeurs possibles ω_1 et ω_2 de la parité P, dans un état de moment cinétique total donné (J et J_z), relié à ℓ par la relation :

$$(I-57) \quad \ell = J + \frac{1}{2} \omega \quad \omega = \pm 1$$

On voit ainsi que : $\ell_3 = \ell_4 = \ell - \omega$

Nous noterons les 2 solutions correspondant au même état J, $\Psi_{\ell m \omega_1}(E)$ et $\Psi_{\ell m \omega_2}(E)$ bien que la première corresponde au nombre quantique ℓ , et la seconde à $\ell + 1$; cette notation est pratique pour l'étude radiale :

$$(I-58) \quad \Psi_{\ell m \omega_1} = \begin{vmatrix} a_1 & Z_\ell^m \\ a_2 & Z_{\ell-1}^{m+1} \\ a_3 & Z_{\ell+1}^m \\ a_4 & Z_{\ell+1}^{m+1} \end{vmatrix} \quad \Psi_{\ell m \omega_2} = \begin{vmatrix} b_1 & Z_{\ell+1}^m \\ b_2 & Z_{\ell+1}^{m+1} \\ b_3 & Z_\ell^m \\ b_4 & Z_\ell^{m+1} \end{vmatrix}$$

Les composantes a_i et b_i sont des fonctions de r définies par : (I-59)

$$\begin{aligned}
 (1-59) \quad a_1 &= -i (\ell + m + 1) F_{\ell-1} & b_1 &= F_{\ell+1} \\
 a_2 &= i \xi (\ell - m) F_{\ell-1} & b_2 &= \xi F_{\ell+1} \\
 a_3 &= G_{\ell-1} & b_3 &= i (\ell + m + 1) G_{\ell+1} \\
 a_4 &= \xi G_{\ell-1} & b_4 &= -i \xi (\ell - m) G_{\ell+1}
 \end{aligned}$$

et les fonctions $F_\ell(r)$ et $G_\ell(r)$ sont les solutions du système d'équations différentielles (1-60)

$$\begin{aligned}
 (1-60) \quad (A^2 + \frac{\alpha Z}{r}) G_\ell + (\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r}) F_\ell &= 0 \\
 (B^2 - \frac{\alpha Z}{r}) F_\ell + (\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r}) G_\ell &= 0
 \end{aligned}$$

- Normalisation des fonctions d'ondes

L'intégration de $\Psi^* \Psi$ doit être effectuée sur tout l'espace, et elle conduit en coordonnées sphériques à :

$$(1-61) \quad \int \Psi^* \Psi d\tau = 4\pi (\ell+m+1)! (\ell-m)! \int_0^\infty (F^2 + G^2) r^2 dr \int_{\theta, \phi} \delta_{\ell, \ell} \delta_{m, m} \delta_{\sigma, \sigma}$$

Nous choisirons donc le facteur de normalisation angulaire $N(\ell)$:

$$(1-62) \quad N(\ell) = (4\pi (\ell+m+1)! (\ell-m)!)^{-\frac{1}{2}}$$

Nous nous intéressons uniquement aux énergies E telles que $|E| > 1$, et par conséquent nous n'avons pas d'états discrets, mais un spectre continu. Dans de telles conditions l'intégration de la partie radiale de $\Psi^* \Psi$ entre 0 et ∞ diverge, et nous choisirons le facteur de normalisation radiale de façon que :

$$(1-63) \quad \int_0^\infty (F(E_1) F(E_2) + G(E_1) G(E_2)) r^2 dr = \delta(E_1 - E_2)$$

II - EXPRESSION DE L'AMPLITUDE DE LA PROBABILITE DE TRANSITION

Dans ce paragraphe nous réservons les indices aux états

d'énergie négative. Un rayonnement γ d'énergie k ($k = \frac{h\nu}{mc^2}$) se propageant dans la direction $\vec{Oz}$ provoque dans le champ d'un noyau Z (infiniment lourd) une transition d'un état d'énergie négative (E', ℓ', m', w') $E' < -1$ vers un état d'énergie positive (E, ℓ, m, w) $E = k + E'$, dont l'élément de matrice est donné par (I-16) (absorption d'un photon) et prend la forme :

$$(I-64) \quad H(E, \ell, m, w; 0 | E', \ell', m', w'; 1) = -e \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2 c^2}{k\nu}} \int \Psi_{(E, \ell, m, w)}^*(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Psi_{(E', \ell', m', w')} d\tau$$

Pour alléger les notations, nous poserons :

$$(I-65) \quad H = \int \Psi^*(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Psi' d\tau$$

L'amplitude de la probabilité de transition est proportionnelle à H qui, en fonction des composantes Ψ_i et de la projection de la matrice $\vec{\alpha}$ sur le vecteur de polarisation $\vec{e}$ (e_x, e_y) apparait comme la somme de deux termes H_- et H_+ :

$$(I-66) \quad \begin{aligned} H_- &= \int e^{iKr \cos \theta} (\Psi_1^* \Psi_4' + \Psi_3^* \Psi_2') d\tau \\ H_+ &= \int e^{iKr \cos \theta} (\Psi_2^* \Psi_3' + \Psi_4^* \Psi_1') d\tau \\ H &= (e_x - i e_y) H_- + (e_x + i e_y) H_+ \end{aligned}$$

En explicitant les fonctions Ψ_i , on obtient 8 types de transitions possibles à partir d'un état (E', ℓ', m') vers un état (E, ℓ, m)

$$(I-67) \quad \begin{aligned} H_-(w_1 | w'_1) &= \int_0^\infty \int_\Omega d\Omega (a_1^* a'_4 Z_\ell^{-m} Z_{\ell'+1}^{m'+1} + a_3^* a'_2 Z_{\ell+1}^{-m} Z_{\ell'}^{m'+1}) e^{iKr \cos \theta} r^2 dr \\ H_-(w_2 | w'_2) &= \int_0^\infty \int_\Omega d\Omega (b_1^* b'_4 Z_{\ell+1}^{-m} Z_{\ell'}^{m'+1} + b_3^* b'_2 Z_\ell^{-m} Z_{\ell'+1}^{m'+1}) e^{iKr \cos \theta} r^2 dr \\ H_-(w_3 | w'_3) &= \int_0^\infty \int_\Omega d\Omega (b_1^* a'_4 Z_{\ell+1}^{-m} Z_{\ell'+1}^{m'+1} + b_3^* a'_2 Z_\ell^{-m} Z_{\ell'}^{m'+1}) e^{iKr \cos \theta} r^2 dr \\ H_-(w_4 | w'_4) &= \int_0^\infty \int_\Omega d\Omega (a_1^* b'_4 Z_\ell^{-m} Z_{\ell'}^{m'+1} + a_3^* b'_2 Z_{\ell+1}^{-m} Z_{\ell'+1}^{m'+1}) e^{iKr \cos \theta} r^2 dr \end{aligned}$$

$$H_+(\omega_1|\omega'_1) = \iint_{\Omega} d\Omega (a_4^* a'_1 Z_{\ell+1}^{-(m+1)} Z_{\ell'}^{m'} + a_2^* a'_3 Z_{\ell}^{-(m+1)} Z_{\ell'+1}^{m'}) e^{iKr \cos \theta} r^2 dr$$

$$H_+(\omega_2|\omega'_2) = \iint_{\Omega} d\Omega (b_4^* b'_1 Z_{\ell}^{-(m+1)} Z_{\ell'}^{m'} + b_2^* b'_3 Z_{\ell+1}^{-(m+1)} Z_{\ell'}^{m'}) e^{iKr \cos \theta} r^2 dr$$

$$H_+(\omega_2|\omega'_1) = \iint_{\Omega} d\Omega (b_4^* a'_1 Z_{\ell}^{-(m+1)} Z_{\ell'}^{m'} + b_2^* a'_3 Z_{\ell+1}^{-(m+1)} Z_{\ell'+1}^{m'}) e^{iKr \cos \theta} r^2 dr$$

$$H_+(\omega_1|\omega'_2) = \iint_{\Omega} d\Omega (a_4^* b'_1 Z_{\ell+1}^{-(m+1)} Z_{\ell'+1}^{m'} + a_2^* b'_3 Z_{\ell}^{-(m+1)} Z_{\ell'}^{m'}) e^{iKr \cos \theta} r^2 dr$$

La détermination de H nécessite l'intégration de ces expressions sur tout l'espace, c'est à dire par rapport à $\Omega = (\theta, \varphi)$ et par rapport à r.

Nous étudierons d'abord l'intégration angulaire, qui nous le verrons est réalisable analytiquement, et permettra d'établir des règles de sélection, puis l'intégration radiale.

III - INTEGRATION ANGULAIRE

1 - Intégration par rapport à φ . Règles de sélection

L'aspect de (I-67) montre que les termes dépendant de φ sont de la forme :

$$\begin{aligned} e^{+ (m' - m + 1) \varphi} & \quad \text{dans } H_- \\ e^{+ (m' - m - 1) \varphi} & \quad \text{dans } H_+ \end{aligned}$$

Il en résulte que l'intégration par rapport à φ impose les règles de sélection :

$$(I-68) \quad \begin{aligned} m &= m' + 1 & H_- &\neq 0 \\ m &= m' - 1 & H_+ &\neq 0 \end{aligned}$$

Ce résultat ne fait d'ailleurs que traduire la propriété bien connue selon laquelle un photon polarisé circulairement est dans un état où la composante de son moment angulaire suivant sa direction de propagation est ± 1 .

1 - Symétries par rapport à m

On peut remarquer que l'on passe d'une transition H_+ à une transition H_- (au signe près) par le changement :

$$\begin{aligned} m' &\longrightarrow -m' - 1 \\ m + 1 &\longrightarrow -m \end{aligned}$$

Cette transformation échange en effet respectivement les premier et deuxième termes de H_+ avec les deuxième et premier termes de H_- , et d'autre part elle n'affecte pas le coefficient de normalisation angulaire de $\Psi (\dots m \dots)$:

$$N_{\Omega} (m) = (4\pi (\ell+m+1)! (\ell-m)!)^{\frac{1}{2}} = N_{\Omega} (-m-1)$$

On pourra donc écrire :

$$(1-69) \quad |H_+ (-m' - 1)|^2 = |H_- (m')|^2$$

relation qui montre que pour une valeur donnée de l' , il suffit de calculer les amplitudes des transitions effectuées seulement à partir des valeurs de $m' \geq 0$

2 - Intégration par rapport à θ

L'expression (1-67) montre qu'une fois effectuée l'intégration par rapport à ψ , qui donne le même résultat 2π dans les huit intégrales, l'intégration par rapport à θ porte sur des expressions du type :

$$(1-70) \quad \int_0^\pi P_{\ell'}^{m'} (\cos \theta) P_{\ell}^m (\cos \theta) e^{iKr \cos \theta} \sin \theta \, d\theta$$

On pourrait penser développer l'exponentielle suivant les puissances de $\vec{k} \vec{r}$:

$$(1-71) \quad e^{i\vec{k} \vec{r}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\vec{k} \vec{r})^n}{n!}$$

Un tel développement ne présente de l'intérêt que si la

considération des tout premiers termes est suffisante, (approximation dipolaire), ce qui n'est pas le cas lorsque la longueur d'onde du rayonnement est petite par rapport aux dimensions du domaine où se produit l'interaction ("rayon de l'atome"). Or pour la production de paires ($k \gg 2$) le produit kr est supérieur à l'unité dès que $r > \frac{1}{2}$ ($\approx 1,93 \cdot 10^{-11}$ cm), alors que l'interaction peut avoir lieu pour des valeurs de r de l'ordre de $a_0 = 137$ ($\approx 0,53 \cdot 10^{-8}$ cm).

D'autre part le développement (I-71) conduirait à l'intégration par rapport à r d'expressions de la forme :

$$(I-72) \quad F(r) G(r) r^n dr$$

qui nous le verrons d'après le comportement asymptotique de F et G , sont divergentes.

On peut cependant intégrer (I-70) dans tous les cas, en développant l'exponentielle sur les polynomes de Legendre.

a) Méthode générale d'intégration

L'utilisation du développement (I-73) :

$$(I-73) \quad e^{i k r \cos \theta} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} i^{\lambda} (2\lambda+1) j_{\lambda}(kr) P_{\lambda}(\cos \theta)$$

($j_{\lambda}(kr)$ fonction de BESSEL sphérique)

va permettre de transformer l'intégrale (I-70) en une série d'intégrales du type (I-74) :

$$(I-74) \quad \int_{-1}^{+1} P_{\ell'}^{m'}(u) P_{\ell}^m(u) P_{\lambda}(u) du$$

L'intégrale (I-74) d'un produit de trois fonctions de Legendre s'exprime au moyen des coefficients de CLEBSCH GORDAN :

$$(I-75) \quad \int_{-1}^{+1} P_{\ell'}^{m'} P_{\ell}^m P_{\lambda} du = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(2\ell'+1)(2\lambda+1)(2\ell+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \ell' & \lambda & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & \lambda & \ell \\ m' & 0 & -m' \end{pmatrix}$$

La relation (I-75) permet de donner les règles de sélection qui doivent exister entre $\ell \ell'$ et λ pour que l'intégrale (I-75) ne soit pas nulle :

$$(I-76) \quad |\lambda - \ell'| \leq \ell \leq \lambda + \ell'$$

Or la décomposition de l'exponentielle fait intervenir toutes les valeurs possibles de λ (0 à ∞), et il en résulte qu'à une valeur initiale ℓ' correspond une infinité de valeurs ℓ respectant (I-76), et on voit ainsi que toutes les transitions $\ell' \rightarrow \ell$ sont permises.

Néanmoins pour une transition donnée $\ell' \rightarrow \ell$, seules les valeurs de λ respectant (I-76) donneront une contribution à (I-75), et la série initiale donnant (I-70) se réduit à une somme finie d'intégrales. Après intégration angulaire, on obtient :

$$(I-77) \quad \int_{-1}^{+1} P_{\ell'}^{m'} P_{\ell}^m e^{i k r u} du = \sum_{\substack{|\ell' - \ell| \leq \lambda \\ \ell' + \ell \geq \lambda}} \frac{(2\lambda + 1)}{2\pi} \lambda \left[\frac{(2\ell' + 1)(2\lambda + 1)(2\ell + 1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \ell' & \lambda & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & \lambda & \ell \\ m' & 0 & -m \end{pmatrix} j_{\lambda}(kr)$$

b) Transition à partir de l'état fondamental

L'état fondamental est celui où $\ell' = m' = 0$ $J' = \frac{1}{2}$, et avec la notation adoptée il est donc représenté par $\Psi(E', 0, 0, \omega_1)$ tandis que $\Psi(E', 0, 0, \omega_2)$ correspond à $J' = \frac{1}{2}$ $\ell' = 1$

L'expression (I-77) se simplifie alors car seule subsiste dans la sommation la valeur $\lambda = \ell$, et les éléments de matrice associés aux transitions effectuées à partir de l'état $\ell' = m' = 0$ se présentent sous la forme (I-78) où l'on a tenu compte de la normalisation angulaire, et exprimé les coefficients a_1 et b_1 en fonctions de $F(r)$ et $G(r)$.

$$\begin{aligned}
 H_{-}(\omega_1|\omega'_1) &= \int_0^{\infty} r^{\ell} [\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{\frac{1}{2}} F_{\ell-1}(r) G'_{-1}(r) j_{\ell}(kr) (kr)^{-1} r^2 dr \\
 H_{-}(\omega_2|\omega'_1) &= \int_0^{\infty} r^{\ell} [\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{\frac{1}{2}} F_{\ell+1}(r) G'_{-1}(r) j_{\ell+1}(kr) (kr)^{-1} r^2 dr \\
 (I-78) \quad H_{+}(\omega_1|\omega'_1) &= \int_0^{\infty} r^{\ell} (\ell+1)^{\frac{1}{2}} \left\{ -G_{\ell-1} F'_{-1} j_{\ell+1} + F_{\ell-1} G'_{-1} (j_{\ell-1} - (\ell+1)(kr)^{-1} j_{\ell}) \right\} r^2 dr \\
 H_{+}(\omega_2|\omega'_1) &= \int_0^{\infty} r^{\ell} (\ell+1)^{\frac{1}{2}} \left\{ G_{\ell+1} F'_{-1} j_{\ell} + F_{\ell+1} G'_{-1} (j_{\ell} - (\ell+2)(kr)^{-1} j_{\ell+1}) \right\} r^2 dr
 \end{aligned}$$

De façon analogue nous pouvons écrire les éléments de matrice associés aux transitions effectuées depuis l'état $(J' = \frac{1}{2}, \ell' = 1)$ décrit par $\Psi(E', 0, 0, \omega_2)$

$$\begin{aligned}
 H_{-}(\omega_2|\omega'_2) &= \int_0^{\infty} r^{\ell} [\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{\frac{1}{2}} G_{\ell+1}(r) F'_{-1}(r) j_{\ell}(kr) (kr)^{-1} r^2 dr \\
 H_{-}(\omega_1|\omega'_2) &= \int_0^{\infty} r^{\ell} [\ell(\ell+1)(\ell+2)]^{\frac{1}{2}} G_{\ell-1}(r) F'_{-1}(r) j_{\ell+1}(kr) (kr)^{-1} r^2 dr \\
 (I-79) \quad H_{+}(\omega_2|\omega'_2) &= \int_0^{\infty} r^{\ell} (\ell+1)^{\frac{1}{2}} \left\{ -F_{\ell+1} G'_{-1} j_{\ell+1} + G_{\ell+1} F'_{-1} (j_{\ell-1} - (\ell+1)(kr)^{-1} j_{\ell}) \right\} r^2 dr \\
 H_{+}(\omega_1|\omega'_2) &= \int_0^{\infty} r^{\ell} (\ell+1)^{\frac{1}{2}} \left\{ F_{\ell-1} G'_{-1} j_{\ell} + G_{\ell-1} F'_{-1} (j_{\ell} - (\ell+2)(kr)^{-1} j_{\ell+1}) \right\} r^2 dr
 \end{aligned}$$

L'aspect de (I-78) et (I-79) montre que les éléments de matrice qui donnent l'amplitude de la probabilité des transitions s'effectuant à partir de $(E', J' = \frac{1}{2})$ se présentent maintenant sous la forme d'intégrales par rapport à r de produits de fonctions radiales $F(r)$ $G(r)$ dépendant de E', k, Z , par des fonctions de Bessel sphériques ne dépendant que de l'énergie k .

Pour pouvoir calculer ces intégrales, il est d'abord nécessaire d'étudier la forme explicite de fonctions F et G , puis d'en rechercher des expressions approchées susceptibles de faciliter l'intégration.

IV - ETUDE DES FONCTIONS RADIALES $F(r)$ et $G(r)$

Les fonctions F et G sont solutions du système d'équations différentielles (I-60) :

$$(I-60) \quad \begin{aligned} (A^2 + \frac{\alpha Z}{r}) G_l + (\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r}) F_l &= 0 \\ (B^2 - \frac{\alpha Z}{r}) F_l + (\frac{d}{dr} - \frac{l-1}{r}) G_l &= 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système nous commencerons par écrire les équations du 2ème ordre (I-80-81) vérifiées respectivement par F et G, équations qui s'obtiennent par élimination de F ou G dans (I-60)

$$(I-80) \quad \begin{aligned} r (\alpha Z + A^2 r) \frac{d^2 F}{dr^2} + (3\alpha Z + 2A^2 r) \frac{dF}{dr} + \\ \left[- (A^2 r + \alpha Z)^2 (B^2 - \frac{\alpha Z}{r}) + (l+1) ((l-1)\frac{\alpha Z}{r} - lA^2) \right] F = 0 \end{aligned}$$

$$(I-81) \quad \begin{aligned} r (\alpha Z - B^2 r) \frac{d^2 G}{dr^2} + (3\alpha Z - 2B^2 r) \frac{dG}{dr} + \\ \left[(\alpha Z - B^2 r)^2 (\frac{\alpha Z}{r} + A^2) - (l-1) ((l+1)\frac{\alpha Z}{r} - lB^2) \right] G = 0 \end{aligned}$$

Les coefficients A^2 et B^2 sont positifs ou négatifs suivant le signe de l'énergie:

$$(I-82) \quad \begin{array}{lll} E < -1 & A'^2 < 0 & B'^2 > 0 \\ E > 1 & A^2 > 0 & B^2 < 0 \end{array}$$

Nous désignerons par A et B les quantités dont les parties réelles ou imaginaires sont positives, et nous posons :

$$(I-83) \quad AB = ia \quad a > 0 \quad a^2 = E^2 - 1$$

Nous pouvons alors remarquer, que dans l'approximation non relativiste (I-84) :

$$(I-84) \quad \begin{aligned} A^2 + \frac{\alpha Z}{r} &\simeq 2 & E > 1 \\ B'^2 - \frac{\alpha Z}{r} &\simeq 2 & E' < -1 \end{aligned}$$

ces équations se simplifient et deviennent (I-85 et I-86)

$$(I-85) \quad \frac{d^2 F_\ell}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF_\ell}{dr} + \left(-A^2 B^2 + A^2 \frac{\alpha Z}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) F_\ell = 0 \quad E > 1$$

$$(I-86) \quad \frac{d^2 G_{\ell'}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dG_{\ell'}}{dr} + \left(-A'^2 B'^2 - \frac{B'^2 \alpha Z}{r} - \frac{\ell'(\ell'-1)}{r^2} \right) G_{\ell'} = 0 \quad E' < -1$$

Dans ce cas les solutions F et G ne sont autres que les fonctions d'ondes coulombiennes, solutions de la partie radiale de l'équation de SCHRODINGER avec potentiel de Coulomb (I-87) :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(a^2 + \frac{\ell}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_\ell = 0$$

$$F_\ell = R_\ell \quad E > 1 \quad \ell = 2\alpha Z$$

$$G_{\ell'} = R_{\ell'-1} \quad E' < -1 \quad \ell' = -2\alpha Z$$

Cependant dans le cas général, la résolution de (I-60) et (I-80) n'est pas si simple, et il est utile de procéder dans (I-60) au changement des fonctions défini par :

$$(I-88) \quad \begin{aligned} f &= A G - B F & F &= \frac{g-f}{2B} \\ g &= A F + B G & G &= \frac{g+f}{2A} \end{aligned}$$

les fonctions f et g sont conjuguées (au signe près) :

$$f(E') = -g^*(E') \quad E' < -1$$

$$f(E) = g^*(E) \quad E > 1$$

ce qui permet d'exprimer F et G suivant la partie réelle ou imaginaire d'une seule de ces fonctions, g par exemple :

$$\begin{aligned}
 F(E') &= \frac{1}{B'} \Re(g(E')) & F(E) &= \frac{i}{B} \Im(g(E)) \\
 (I-89) \quad G(E') &= i \int_{A'} \Im g(g(E')) & G(E) &= \frac{1}{A} \Re(g(E))
 \end{aligned}$$

Ce changement permet d'écrire le système (I-60) sous la forme d'un nouveau système différentiel (I-90) :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1+ib}{r} + ia \right) g_\ell &= \frac{\ell+ic}{r} f_\ell \\
 (I-90) \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{1-ib}{r} - ia \right) f_\ell &= \frac{\ell-ic}{r} g_\ell
 \end{aligned}$$

Les nouvelles constantes b et c sont définies par :

$$\begin{aligned}
 ib &= -\frac{\alpha Z}{2} \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) & b &= \alpha Z \frac{E}{\sqrt{E^2-1}} \\
 (I-91) \quad ic &= -\frac{\alpha Z}{2} \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \right) & c &= \frac{\alpha Z}{\sqrt{E^2-1}}
 \end{aligned}$$

et il est facile de voir que :

$$b^2 - c^2 = \alpha^2 Z^2$$

Le système (I-90) peut être résolu en recherchant les solutions sous forme d'intégrales de contour :

$$f(r) = \int_{\Gamma_1} e^{r\gamma} \gamma_1(\gamma) d\gamma$$

$$g(r) = \int_{\Gamma_2} e^{r\gamma} \gamma_2(\gamma) d\gamma$$

Nous avons suivi une autre voie en étudiant directement l'équation du deuxième ordre vérifiée par g, qui nous allons le voir peut se ramener à un type d'équation semblable à celle que vérifie G dans la limite non relativiste.

1 - Étude de l'équation différentielle vérifiée par g

L'élimination de f dans le système (I-90) conduit à l'équation (I-92) :

$$(I-92) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} + (a^2 + \frac{2ab+ic}{r} + \frac{1+(\alpha Z)^2-l^2}{r^2}) \right) g_\ell = 0$$

En écrivant l'équation relative à la fonction $g_i r^{3/2}$, la dérivée première est éliminée, et on obtient une équation de type hypergéométrique confluent :

$$(1-93) \left(\frac{d^2}{dr^2} + (a^2 + \frac{2ab + ia}{r} + \frac{1/4 + (\alpha Z)^2 - \ell^2}{r^2}) \right) (g_i r^{3/2}) = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme (1-94) de WHITTAKER, par les changements de variables (1-95) :

$$(1-94) \left(\frac{d^2}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) \right) Y = 0$$

$$(1-95) \quad z = -2iar \quad \lambda = ib - \frac{1}{2} \quad \mu^2 = \ell^2 - \alpha^2 \quad Y(z) = r^{3/2} g(r)$$

L'intégration des éléments de matrice (1-78) nécessite la connaissance des fonctions $F_{\pm}(\ell+1)$ et $G_{\pm}(\ell+1)$ et il en résulte que les solutions en g intéressantes sont $g_{\pm}(\ell+1)$ et que le coefficient μ^2 correspondant est donc toujours positif. Nous désignons par μ la détermination positive : (1-96) $\mu = \sqrt{\ell^2 - (\alpha Z)^2}$ $\ell \neq 0$. Une nouvelles transformation (1-97) permet d'écrire (1-94) sous la forme de Laplace (1-98) :

$$(1-98) \left(z \frac{d^2}{dz^2} + (b'' - z) \frac{d}{dz} - a'' \right) y = 0$$

$$b'' = 2\mu + 1 \quad a'' = \mu + \frac{1}{2} - \lambda = \mu + 1 - ib \quad Y(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\mu+1/2} y(z)$$

Il est visible que μ n'est pas entier (1-96), et qu'il en est de même du coefficient b'' de l'équation (1-98). Dans ce cas, on sait que la solution générale de (1-98) peut s'exprimer uniquement à l'aide de la fonction ϕ de KUMMER :

$$(1-99) \quad \phi(a'', b'', z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a''(a''+1) \dots (a''+n-1)}{b''(b''+1) \dots (b''+n-1)} \frac{z^n}{n!}$$

et qu'elle est donné par l'expression (1-100) :

$$(I-100) \quad y(\xi) = S_1 \phi(a'', b'', \xi) + S_2 \xi^{1-b''} \phi(a'' - b'' + 1, 2 - b'', \xi)$$

S_1 et S_2 constantes arbitraires

La fonction g s'en déduit aisément d'après (I-95)

$$(I-101) \quad g(r) = r^{-3/2} \xi^{x+1/2} e^{-3/2} y(\xi)$$

ce qui permet d'obtenir deux solutions $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ de (I-92) linéairement indépendantes :

$$(I-102) \quad g^{(1)}(r) = e^{iar} r^{x-1} \phi(a'', b'', -2iar)$$

$$(I-103) \quad g^{(2)}(r) = e^{iar} r^{-(x+1)} \phi(a'' - b'' + 1, 2 - b'', -2iar)$$

Ces solutions ont un comportement différent à l'origine :

$$(I-104) \quad \begin{cases} g^{(1)} \simeq r^{x-1} & r^2 |g^{(1)}(r)|^2 \simeq r^{2x} \\ g^{(2)} \simeq r^{-(x+1)} & |r^2 g^{(2)}(r)|^2 \simeq r^{-2x} \end{cases}$$

et seule est acceptable physiquement la solution $g^{(1)}(r)$ (solution régulière à l'origine).

2 - Expression des solutions F et G du système (I-60)

La solution $g^{(1)}(r)$ que nous avons exprimée au moyen de (I-102) est une solution particulière de l'équation du 2ème ordre (I-92) et n'est évidemment définie qu'à une constante multiplicative S complexe et arbitraire. En fait les solutions dont nous devons faire usage sont celles du système différentiel du 1er ordre (I-90) relatif à f et g , dans lequel f s'exprime en fonction de g suivant la relation (I-105) :

$$(I-105) \quad f = \xi \quad g^* \quad \xi = \begin{cases} +1 & E > 1 \\ -1 & E < -1 \end{cases}$$

Nous devons donc reporter la solution générale dans (I-90) et étudier les restrictions qui lui sont imposées.

Le système différentiel (I-90) se réduit alors à l'équation (I-106) et à son expression conjuguée :

$$(I-106) \quad S \left(\frac{d}{dr} + \frac{1+ib}{r} + ia \right) g(r) = \zeta S^* \frac{\ell+ic}{r} g(r)^*$$

L'expression (I-106) montre que le rapport S/S^* (donc la phase de S) n'est pas arbitraire, mais au contraire bien déterminée par les paramètres a, b, c, ℓ . On obtient facilement sa valeur (I-107) en la calculant d'après (I-106) par exemple à l'origine où le comportement de $g(r)$ est très simple (I-104)

$$(I-107) \quad \frac{S}{S^*} = \zeta \frac{\ell+ic}{\mu+ib}$$

L'emploi des identités (I-108) :

$$(I-108) \quad \frac{\ell+ic}{\mu+ib} = \frac{\mu-ib}{\ell-ic} = \frac{\mu+\ell-i(b-c)}{\mu+\ell+i(b-c)}$$

permet de prendre pour S la valeur (I-109)

$$S = \zeta^{\frac{1}{2}} \frac{\mu+\ell-i(b-c)}{\sqrt{(\mu+\ell)^2 + (b-c)^2}} \quad \zeta^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} i & E' < -1 \\ 1 & E > 1 \end{cases}$$

Dans ces conditions les fonctions f et g sont définies à une constante multiplicative réelle près maintenant par l'expression (I-110) :

$$(I-110) \quad \begin{aligned} g(r) &= \zeta^{\frac{1}{2}} \frac{\mu+\ell-i(b-c)}{\sqrt{(\mu+\ell)^2 + (b-c)^2}} r^{\mu-1} e^{i\ell ar} \phi(\mu+1-ib, 2\mu+1, -2iar) \\ f(r) &= \zeta^{\frac{1}{2}} \frac{\mu+\ell+i(b-c)}{\sqrt{(\mu+\ell)^2 + (b-c)^2}} r^{\mu-1} e^{-i\ell ar} \phi(\mu+1+ib, 2\mu+1, 2iar) \end{aligned}$$

Les fonctions F et G se calculent d'après la relation (I-88) qui les unit à f et g :

$$\begin{aligned}
 F_{\ell}(r) &= \frac{e^{\frac{1}{2}\ell} r^{\ell-1}}{2B\sqrt{(\eta+\ell)^2 + (b-c)^2}} \left\{ (\eta+\ell) \left(e^{i\ell r} \phi(\eta+1-i\ell, 2\eta+1, -2i\ell r) - e^{-i\ell r} \phi(\eta+1+i\ell, 2\eta+1, 2i\ell r) \right) \right. \\
 (I-111) \quad &\quad \left. - i(b-c) \left(e^{i\ell r} \phi(\eta+1-i\ell, 2\eta+1, -2i\ell r) + e^{-i\ell r} \phi(\eta+1+i\ell, 2\eta+1, 2i\ell r) \right) \right\} \\
 G_{\ell}(r) &= \frac{e^{\frac{1}{2}\ell} r^{\ell-1}}{2A\sqrt{(\eta+\ell)^2 + (b-c)^2}} \left\{ (\eta+\ell) \left(e^{i\ell r} \phi(\eta+1-i\ell, 2\eta+1, -2i\ell r) + e^{-i\ell r} \phi(\eta+1+i\ell, 2\eta+1, 2i\ell r) \right) \right. \\
 &\quad \left. - i(b-c) \left(e^{i\ell r} \phi(\eta+1-i\ell, 2\eta+1, -2i\ell r) - e^{-i\ell r} \phi(\eta+1+i\ell, 2\eta+1, 2i\ell r) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Les fonctions F et G sont définies à une constante multiplicative réelle près, dont la détermination dépend de la condition de normalisation radiale (63). Nous allons d'abord examiner le comportement asymptotique de ces fonctions.

3 - Comportement asymptotique des fonctions F et G

Il est utile de rappeler (TR 60) que parmi les solutions y de l'équation hypergéométrique confluyente générale (I-98) il en existe une que nous noterons ψ qui se caractérise par un comportement asymptotique remarquablement simple :

$$(I-112) \quad \psi(\xi) \simeq \xi^{-a''} \quad \xi \rightarrow \infty$$

Lorsque b'' n'est pas entier, la solution générale de (I-98) est donnée par (I-100) et ψ peut s'exprimer au moyen de l'expression (I-113) :

$$\begin{aligned}
 (I-113) \quad \psi(a'', b'', \xi) &= \frac{\Gamma(1-b'')}{\Gamma(a''-b''+1)} \phi(a''; b'', \xi) + \\
 &\quad \frac{\Gamma(b''-1)}{\Gamma(a'')} \phi(a''-b''+1, 2-b'', \xi)
 \end{aligned}$$

Il est intéressant de pouvoir exprimer la fonction de KUMMER suivant ψ :

$$\begin{aligned}
 \phi(a'', b'', \xi) &= \frac{\Gamma(b'')}{\Gamma(b''-a'')} e^{\pm i\pi a''} \psi(a'', b'', \xi) + \\
 (I-114)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(b'')}{\Gamma(a'')} e^{\pm(a''-b'')\pi i + f} \Psi(b''-a'', b'', -f)$$

$$\text{Avec } \pm = \begin{cases} + & 0 < \arg f \leq \pi \\ - & -\pi < \arg f \leq 0 \end{cases}$$

En particulier lorsque $\Re(f) \leq 0$, le développement asymptotique de ϕ s'obtient en considérant (I-114) et (I-112) et conduit à :

$$(I-115) \quad \phi(a'', b'', f) \simeq \frac{\Gamma(b'')}{\Gamma(b''-a'')} (-f)^{-a''} + e^{\pm \frac{\Gamma(b'')}{\Gamma(a'')} f} a''-b''$$

$$\text{Avec } (-f)^{\nu} = e^{-(\pm \pi i)\nu} f^{\nu}$$

L'application de (I-115) à l'expression de $g^{(1)}$ en fonction de ϕ (I-110) nous donne le comportement de $g^{(1)}$ à l'infini.

La valeur des paramètres a'' et b'' :

$$a'' = \gamma + 1 - ib \quad b'' = 2\gamma + 1 \quad a'' - b'' = -(\gamma + ib)$$

montre que le premier terme de (I-115) qui est en $r^{-\gamma-1}$ est négligeable par rapport au second en $r^{-\gamma}$, et il reste finalement pour g l'expression (I-116) :

$$(I-116) \quad \begin{aligned} g^{(1)}(r) &\simeq \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-ib)} e^{-i\pi\gamma} (-2i\pi r)^{-(\gamma+ib)} r^{\gamma-1} \\ g^{(1)}(r) &\simeq \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-ib)} e^{-\frac{\pi b}{2}} (2a)^{-\gamma} \frac{e^{-i(ar+b \log r + \gamma)}}{r} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \gamma = b \operatorname{Log} 2a - \frac{\pi}{2} \gamma$$

Pour alléger les notations, nous posons :

$$(I-117) \quad u(r) = ar + b \log r + \gamma \quad T = \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-ib)} e^{-\frac{\pi b}{2}} (2a)^{-\gamma}$$

On peut ainsi écrire

$$(I-118) \quad g(r) = S g^{(1)}(r) = S T \frac{e^{-i\mu r}}{r}$$

$S T$ est un nombre complexe, dont le module est $|ST| = |T|$ et dont l'argument θ est celui de $\Gamma(\lambda + 1 - ib)$:

$$|ST| = \left| \frac{\Gamma(2\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 - ib)} \right| e^{-\frac{\pi b}{2}} (2a)^{-\lambda}$$

$$ST = |ST| e^{i\theta} \quad \theta = \arg \Gamma(\lambda + 1 + ib)$$

Avec cette notation les comportements de F et G pour un état d'énergie quelconque sont donnés par (I-120) :

$$(I-120) \quad G = \frac{g + \xi g^*}{2A} \simeq \frac{|T|}{2Ar} \left((\xi + 1) \cos(u - \theta) + i(\xi - 1) \sin(u - \theta) \right)$$

$$F = \frac{g - \xi g^*}{2B} \simeq \frac{-|T|}{2Br} \left((\xi - 1) \cos(u - \theta) + i(\xi + 1) \sin(u - \theta) \right)$$

Ces expressions sont en fait réelles ou purement imaginaires suivant que les énergies sont positives ou négatives.

Dans l'état initial $E' < -1$ le comportement asymptotique de F et G est (I-120') :

$$(I-120') \quad G(E') \simeq -i \frac{|T'|}{A'} \frac{\sin}{r} (u' - \theta')$$

$$F(E') \simeq \frac{|T'|}{B'} \frac{\cos}{r} (u' - \theta')$$

Dans l'état final : $E > 1$

$$(I-120'') \quad G(E) \simeq \frac{|T|}{A} \frac{\cos}{r} (u - \theta)$$

$$F(E) \simeq -i \frac{|T|}{B} \frac{\sin}{r} (u - \theta)$$

Les fonctions radiales ont donc une allure oscillatoire, avec une phase qui pour un état d'énergie donné est :

$$(I-121) \quad ar + b \log r + \eta - \theta$$

Le premier terme est indépendant du signe de l'énergie, puisque $a > 0$ et correspond à l'onde plane existant en l'absence

de potentiel. Il n'en est pas de même des termes suivants et en particulier du déphasage logarithmique $b \log r$, caractéristique du potentiel coulombien, dont le coefficient b a pour signe celui de l'énergie de l'état décrit par les fonctions d'ondes F et G :

$$b = \alpha Z \frac{E}{\sqrt{E^2 - 1}}$$

On peut remarquer d'autre part que b n'est jamais nul (excepté en l'absence de potentiel : $Z = 0$)

4 - Normalisation des fonctions radiales

Le comportement asymptotique de F et G (120) permet de déterminer le coefficient de normalisation radiale N des fonctions d'onde $\Psi(E, \ell, m, \varpi)$ qui est choisi de façon telle que soit vérifiée (I-63) :

$$\int_0^\infty (F(E_1) F(E_2) + G(E_1) G(E_2)) r^2 dr = \delta(E_1 - E_2)$$

Il suffit pour cela d'intégrer les produits $F(E_1) F(E_2)$ et $G(E_1) G(E_2)$ entre 0 et R , puis d'en calculer la limite lorsque $R \rightarrow \infty$ en tenant compte de la propriété classique de $\delta(a)$ exprimée par (I-122). On obtient les expressions (I-123) et (I-124) :

$$(I-122) \quad \delta(a) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin a R}{a}$$

$$(I-123) \quad \int_0^\infty G(E_1) r^2 G(E_2) dr = \frac{|T^2|}{2|A|^2} \pi \delta(a_1 - a_2)$$

$$(I-124) \quad \int_0^\infty F(E_1) r^2 F(E_2) dr = \frac{|T^2|}{2|B|^2} \pi \delta(a_1 - a_2)$$

La somme des intégrales (I-123) et (I-124) s'exprime en utilisant les relations d'identité entre A, B, E , et en remarquant que (I-125) :

$$(I-125) \quad \delta(a) = \left| \frac{a}{E} \right| \delta(E)$$

$$(1-126) \quad \int_0^{\infty} [F(E_1) F(E_2) + G(E_1) G(E_2)] r^2 dr = \frac{|E||T|^2}{a^2} \pi \delta(a, -a_1) = \frac{\pi |T|^2}{a} \delta(E_1 - E_2)$$

Le coefficient de normalisation $N_R (\psi)$ est donc égal à

$|T|^{-1} a^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}}$, et en explicitant T (I-119) s'exprime par :

$$(1-127) \quad N_R (\psi) = \left| \frac{\Gamma(\chi + 1 - ib)}{\Gamma(2\chi + 1)} \right| 2^{\chi} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi b}{2}} a^{\chi + \frac{1}{2}}$$

V - INTEGRATION RADIALE - SECTION TOTALE

L'étude des fonctions radiales nous a permis d'exprimer F et G à l'aide des fonctions de KUMMER et des fonctions exponentielles (I-111) et un produit du type $F G^*$ nécessaire à l'intégration des éléments de matrice (I-78-79) peut de cette façon être décomposé en une somme de termes de la forme (I-128) (et de leurs expressions conjuguées)

$$(1-128) \quad \begin{aligned} & r^{\chi + \chi'} e^{i(a+a')r} \phi(\chi + 1 - ib, 2\chi + 1, -2iar) \phi(\chi' + 1 - ib', 2\chi' + 1, -2ia'r) \\ & r^{\chi - \chi'} e^{i(a-a')r} \phi(\chi + 1 - ib, 2\chi + 1, -2iar) \phi(\chi' + 1 - ib', 2\chi' + 1, 2ia'r) \end{aligned}$$

Le calcul des éléments de matrice (I-78) nécessite donc l'intégration de termes analogues à (I-128) mais qui de plus doivent être multipliés par des fonctions de Bessel sphériques.

Sous cette forme, il ne nous a pas été possible d'obtenir une expression analytique des intégrales (I-79).

Nous avons néanmoins étudié les possibilités de résoudre ces intégrations, en utilisant non plus les solutions exactes ϕ de notre problème, mais des fonctions approchées, qui pensions nous, seraient susceptibles de simplifier la forme des produits :

$$F \approx G \approx f$$

et par là d'obtenir une expression approchée des intégrales (I-79) qui soit analytique.

1 - Développement des solutions radiales suivant des fonctions de BESSEL

La fonction ϕ de KUMMER peut être développée suivant les fonctions de Bessel uniformes [TR - 60] et il a été démontré que le développement converge très rapidement de telle sorte que l'utilisation des deux premiers termes de la série (I-129) fournit une approximation suffisante de ϕ :

$$(I-129) \quad \phi(a'', b'', \xi) = e^{\frac{1}{2}\xi} \Gamma(b'') \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{\xi}{2}\right)^n E_{b''+n-1} \left(\frac{(b''-a'')}{2}\xi\right)$$

$$\text{Avec} \quad E_{\nu}(z) = (z)^{-\frac{\nu}{2}} J_{\nu}(2\sqrt{z})$$

$$A_0 = 1 \quad A_1 = 0 \quad A_2 = \frac{1}{2}$$

L'application de la relation (I-129) à l'expression (I-110) permet alors d'expliciter la fonction $g_{\ell}(r)$ au moyen de deux fonctions de Bessel seulement :

$$(I-130) \quad g_{\ell}(r) = \xi^{\frac{1}{2}} (-2ia)^{-\ell} \Gamma(2\ell+1) \frac{\gamma+\ell-i(b-c)}{\sqrt{(\gamma+\ell)^2+(b-c)^2}} r^{-1} \left[J_{2\ell}(x\sqrt{r}) + \frac{2\ell+1}{8} (-2ia)^{\ell} J_{2(\ell+1)}(x\sqrt{r}) \right]$$

$$\text{Avec} \quad x = 2 \sqrt{a(2b+1)}$$

On peut ainsi, en utilisant l'expression de g suivant deux fonctions de Bessel, exprimer les éléments de matrice (I-78) à l'aide d'une somme d'intégrales de produits de trois fonctions de Bessel par des puissances de r .

Dans le cas général les coefficients intervenant dans la relation (I-130) sont complexes. Cependant lorsque l'énergie de l'électron est suffisamment grande (approximation ultra relativiste) il se produit des simplifications car :

$$b \rightarrow \propto Z \quad c \rightarrow 0$$

et il en résulte que les fonctions $J_{2\ell}(x\sqrt{r})$ sont en première

approximation indépendantes de Z (Ce résultat est d'autant plus justifié que les noyaux sont légers.) Dans ce cas, on voit facilement que g ne dépend de Z que par l'intermédiaire du coefficient $[(\mu + l - i(b-c))((\mu + l)^2 + (b-c)^2)^{-\frac{1}{2}}]$ qui peut être développé suivant les puissances de αZ .

On voit donc que l'utilisation de (I-130) est très intéressante dans le cas ultra relativiste puisqu'elle permet d'obtenir un développement des fonctions radiales, donc de la section suivant Z . Malheureusement, il n'en est pas de même dans le cas général, et en particulier dans le domaine d'énergie comprise entre 1 et 2, où les variations considérables des coefficients en fonction de l'énergie (Fig. I 7) sont très défavorables, et ne nous ont pas donné la possibilité d'établir un développement semblable dans ce cas.

2 - Résolution numérique

Après avoir vu les difficultés, sinon l'impossibilité d'établir une expression analytique des éléments de matrice (I-78), il nous faut maintenant envisager de quelles façons peut être résolu leur calcul, sous une forme numérique seulement, nous avons utilisé pour cela l'ordinateur IBM 1.620 du Centre de Calcul de la Faculté des Sciences de LYON.

Le calcul de la section totale s'est effectué selon deux programmes : le premier ayant pour but la détermination numérique des fonctions radiales, le second l'intégration des produits de ces fonctions par les fonctions de Bessel tels qu'ils sont définis par (I-78).

Une solution possible pour calculer ces produits consiste à utiliser le développement des fonctions $F_l(r)$, $G_l(r)$ et $Y_l(kr)$ suivant les puissances de r (I-111). La difficulté qui se présente alors est due au fait que le coefficient a_n du terme général de la série hypergéométrique confluyente qui permet d'exprimer $g_l(r)$ est complexe :

$$c_n = \frac{(\mu+1-ib)}{(2\mu+1)} \dots \frac{(\mu+n-ib)}{(2\mu+n)} \frac{(-2ia)^n}{n!}$$

et qu'il est nécessaire pour déterminer les coefficients réels du développement de $F(r)$ et $G(r)$, d'en extraire la partie réelle $\Re(c_n)$ et la partie imaginaire $\Im(c_n)$; ce qui peut être fait en utilisant les relations de récurrence (I-131) qu'il est facile d'établir entre $\Re(c_n)$ et $\Im(c_n)$:

$$(I-131) \quad \begin{aligned} \Re(c_n) &= \frac{-2a}{n(2\mu+n)} \{ b \Re(c_{n-1}) - (\mu+n) \Im(c_{n-1}) \} \\ \Im(c_n) &= \frac{-2a}{n(2\mu+n)} \{ (\mu+n) \Re(c_{n-1}) + b \Im(c_{n-1}) \} \end{aligned}$$

Le problème se complique rapidement pour les grandes valeurs de r et n , et il a semblé plus simple de calculer directement les fonctions F et G non pas d'après leur développement en série mais en résolvant numériquement le système différentiel (I-60), tout en utilisant la forme asymptotique analytique (I-120).

a) Calcul numérique des fonctions radiales

L'expression de la forme asymptotique de F et G (I-120) en r^{-1} montre qu'il est beaucoup plus intéressant de calculer, non pas les fonctions elles mêmes, mais leur produit par r . Pour cela on pose :

$$(I-132) \quad I_\ell(r) = r F_\ell(r) \quad H_\ell(r) = r G_\ell(r)$$

I (et H) ont donc d'après (I-120) une amplitude qui tend à devenir une constante : I_∞ (H_∞) quand $r \rightarrow \infty$.

Pour calculer ces fonctions nous considérons d'abord le système (I-60) ce qui permet d'écrire le système (I-133) :

$$(I-133) \quad \begin{aligned} (E+1 + \frac{\alpha Z}{r}) I_\ell + (\frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r}) I_\ell &= 0 \\ (E+1 - \frac{\alpha Z}{r}) I_\ell + (\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r}) H_\ell &= 0 \end{aligned}$$

Lorsque l'énergie est positive $E+1 + \frac{\alpha Z}{r} \neq 0$, et I est so-

lution de l'équation différentielle du 2ème ordre (I-134), tandis que H s'exprime en fonction de l et l' d'après (I-135) :

$$(I-134) \quad \frac{d^2 l}{dr^2} = \frac{-\alpha Z}{r^2} \frac{1}{E+1 + \frac{\alpha Z}{r}} \frac{dl}{dr} + \left\{ \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{\ell}{r^2} - \frac{\alpha Z \ell}{r^2 ((E+1)r + \alpha Z)} + (E+1 + \frac{\alpha Z}{r}) (-E+1 - \frac{\alpha Z}{r}) \right\} l$$

$$(I-135) \quad H = - \left(\frac{\ell}{r} l + \frac{dl}{dr} \right) \frac{1}{E+1 + \frac{\alpha Z}{r}}$$

Lorsque l'énergie est négative, on peut procéder au changement :

$$(I-136) \quad E \rightarrow -E \quad \ell \rightarrow -\ell \quad \alpha Z \rightarrow -\alpha Z$$

On constate en effet que :

$$(I-137) \quad H_{\ell} (\alpha Z, E) = l_{-\ell} (-\alpha Z, -E)$$

L'équation différentielle (I-134) a été résolue par la méthode de RUNGE KUTTA. Nous ne nous intéressons qu'aux solutions (non normalisées pour l'instant) qui d'après (I-111) passent par l'origine. L'expression mathématique de F et G (I-111) montre que l et sa dérivée l' ont un comportement au voisinage de $r = 0$ donné par (I-138) :

$$(I-138) \quad r \rightarrow 0 \quad l(r) \simeq r^{\chi} \quad l'(r) \simeq \chi r^{\chi-1} \quad \chi = \sqrt{\ell^2 - \alpha^2 Z^2}$$

Il en résulte que les fonctions l_1 et l_{-1} ont une dérivée infinie à l'origine, et pour cette raison nous ne pouvons pas choisir $r = 0$ comme point initial.

Nous avons donc déterminé les fonction $l + 1$ à partir d'un point arbitraire r_0 suffisamment petit pour que les valeurs

de I et I' correspondantes puissent être calculées au moyen de (I-138). Les conditions initiales nécessaires à la résolution de (I-134) ont été calculées au point $r_0 = 10^{-3}$, pour $Z = 53$ et $\ell = \pm 1$:

$$y = 0,9221 \quad r_0 = 10^{-3} \quad I_{\pm 1}(r_0) = 1,713 \cdot 10^{-3} \quad I'(r_0) = 1,579$$

Le pas choisi $\Delta r = 10^{-1}$ permettait d'autre part d'assurer que la méthode R.K. donnait des résultats corrects. Le programme de calcul a d'ailleurs été testé pour $\alpha Z = 0$, auquel cas l'équation (I-134) donnant I se simplifie considérablement, et devient (I-139) :

$$(I-139) \quad I'' + (E^2 - 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}) I = 0$$

dont la solution régulière à l'origine est $r j_{\ell}(\sqrt{E^2 - 1} r)$

Nous avons vérifié qu'effectivement les solutions I_1 et H_1 obtenues pour $E = 2$, d'après le programme général étaient bien de la forme (à une constante multiplicative près) :

$$I_1 = r j_1(\sqrt{3} r)$$

$$H_1 = r j_0(\sqrt{3} r)$$

Le programme de calcul était d'autre part conçu pour que les valeurs des fonctions I et H soient enregistrées sur cartes perforées jusqu'à $r = 10$ seulement, car au delà on peut en effet assimiler les fonctions à leur développement asymptotique (I-120). Cependant pour déterminer l'amplitude I_{∞} (et H_{∞}) nécessaire à la normalisation les calculs étaient poursuivis jusqu'à $r = 30$ mais seules étaient enregistrées les valeurs des amplitudes.

Bien entendu, avant la normalisation, seul le rapport I_{∞}/H_{∞} est déterminé, et nous avons représenté ses variations, en fonction de l'énergie sur la (Figure I-8). La condition de normalisation (I-63) s'exprime très simplement :

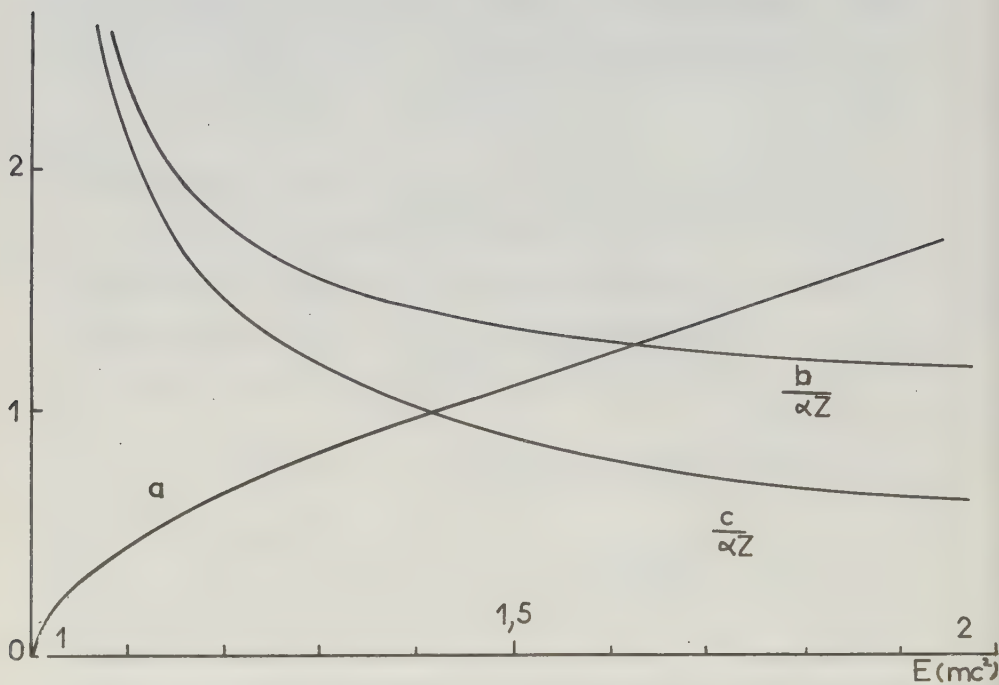


Fig.1-7 - Variations des paramètres a, b, c , en fonction de l'énergie E de l'électron

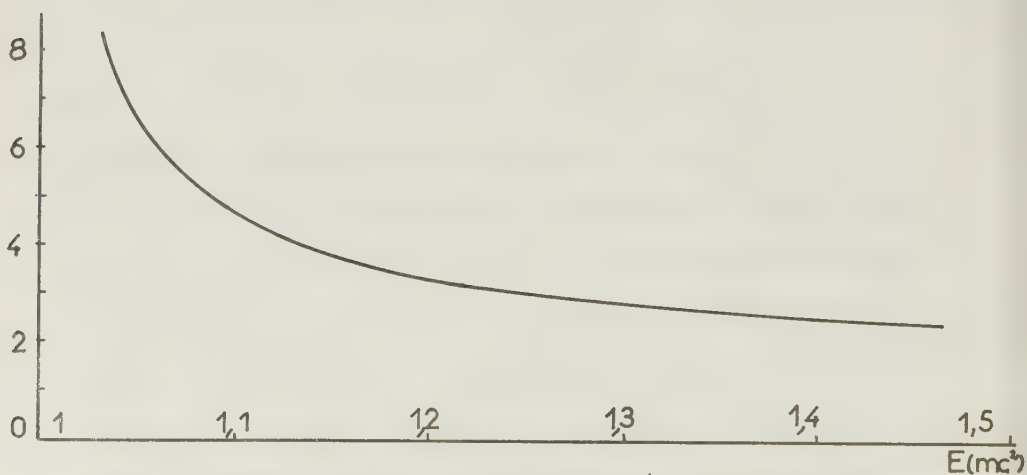


Fig.1-8 - Variations du rapport des amplitudes I_0/H_0 en fonction de l'énergie E de l'électron.

$$(I-140) \quad H_{\infty}^2 + I_{\infty}^2 = \left| \frac{E}{a} \right| \frac{2}{\pi}$$

et il en résulte que le coefficient de normalisation de la solution I est égal à :

$$(I-141) \quad N_R(I) = I_{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{E+1}{E-1}} \right)^{\frac{1}{2}} = H_{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{E-1}{E+1}} \right)^{\frac{1}{2}} = N_R(H)$$

De cette façon nous avons procédé au calcul des fonctions $I_{\pm 1}$ et $H_{\pm 1}$ normalisées par (I-141), pour la valeur de $Z = 53$, et pour des énergies positives et négatives, variant de $|E| = 1,05$ à $|E| = 1,5$ avec $\Delta E = 0,05$.

b) Intégration - Section totale

Les valeurs de l'énergie pour lesquelles les fonctions F et G ont été calculées, ont été choisies afin de pouvoir déterminer la section totale au centre de la région énergétique où devait porter notre étude expérimentale, soit $k = 2,5$.

Pour calculer les éléments de matrice correspondant à une transition

$$E' \longrightarrow E = E' + 2,5$$

les résultats obtenus précédemment pour chaque valeur de r étaient d'abord assemblés dans l'ordre :

$$J(E', r) \quad H(E, r)$$

et le programme d'intégration permettait de calculer en chaque point r le produit $J(E', r) H(E, r) j_0(kr)$ (Les fonctions de Bessel étaient calculées par un programme annexe) puis d'intégrer le résultat (par la méthode des trapèzes) entre $r_0 = 10^{-3}$ et $R = 10$.

Bien entendu il a fallu tenir compte de la contribution de l'intégrale depuis $R = 10$ jusqu'à $r = \infty$, et nous nous sommes servis pour cela de l'expression asymptotique des fonctions radiales (I-120) et de celle des fonctions de Bessel

On est alors conduit à résoudre des intégrales du type :

$$(I-142) \quad \int_{R=10}^{\infty} \frac{\cos u(r)}{r} dr \quad \int_{R=10}^{\infty} \frac{\cos u(r)}{r^2} dr$$

où $u(r)$ est une fonction de r :

$$(I-143) \quad u(r) = pr + q \text{ Log } r + s$$

dont les coefficients p , q et s sont liés à a , b et au déphasage des fonctions par :

$$(I-144) \quad \begin{aligned} p &= a' + \frac{a}{2} + k & s &= p' + \frac{b}{2} + \frac{\pi}{2} \\ q &= b' + \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Pour calculer les intégrales (I-142) nous les avons développées suivant les puissances de $\frac{1}{R}$, ce qui permet d'obtenir les relations (I-145) :

$$(I-145) \quad \begin{aligned} \int_R^{\infty} \frac{\cos u(r)}{r} dr &= - (K \sin u(R) + L \cos u(R)) \\ \int_R^{\infty} \frac{\cos u(r)}{r^2} dr &= - (M \sin u(R) + N \cos u(R)) \end{aligned}$$

Les coefficients K , L , M , N étant donnés par (I-146) :

$$(I-146) \quad \begin{aligned} K &= \frac{1}{pR} - \frac{q}{p^2 R^2} + \frac{(q^2 - 2)q}{p^3 R^3} + \dots & M &= \frac{1}{pR^2} - \frac{q}{p^2 R^3} + \dots \\ L &= \frac{-1}{p^2 R^2} + \frac{3q}{p^3 R^3} + \dots & N &= \frac{-2}{p^2 R^3} + \dots \end{aligned}$$

Le calcul des huit intégrales (I-78-79) achevé pour chaque transition $E' \rightarrow E' + 2,5$, la section totale était obtenue par intégration sur E' de la somme de leurs carrés, ce qui nous a permis finalement d'obtenir :

$$(I-147) \quad \sigma(2,5) = 4,3 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2/\text{at} \quad Z = 53$$

Le résultat de JAEGER et HULME, pour $k = 3$ est :

$$(I-148) \quad \sigma(3) = 20 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2/\text{at} \quad Z = 53$$

Il est intéressant de comparer ces valeurs à celles que prévoit la théorie de BETHE HEITLER (I-49) et nous les donnons (tableau I-III) ainsi que leurs rapports :

k	2,5	3
σ (ondes partielles)	$4,3 \cdot 10^{-26}$	$20 \cdot 10^{-26}$
σ_B (BORN)	$3 \cdot 10^{-26}$	$14,8 \cdot 10^{-26}$
$\frac{\sigma}{\sigma_B}$	1,43	1,38

Il serait évidemment profitable de pouvoir calculer la section pour d'autres valeurs de k encore plus faibles, malheureusement le programme de calcul dont nous venons de définir les grandes lignes s'est avéré long et fort coûteux, et pour cette raison nous nous sommes contentés de la seule valeur de la section calculée pour $k = 2,5$. Nous verrons cependant, à l'issue de l'étude expérimentale, que la confrontation des valeurs théoriques de la section et des mesures expérimentales nous a permis de proposer une forme empirique de la section où k et Z apparaissent de façon explicite.

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

INTRODUCTION

L'exposé des travaux relatifs à la production de paires d'électrons par un rayonnement γ , permet de classer les différents dispositifs expérimentaux utilisés suivant qu'ils permettent ou non d'étudier la distribution angulaire et énergétique des électrons.

Dans le premier cas, le spectre énergétique des particules créées peut être analysé :

- directement dans la cible; lorsque celle ci est une émulsion nucléaire, et cette technique très intéressante différencie la création dans le champ du noyau de la création dans le champ des électrons puisqu'elle conduit à l'observation de paires d'électrons dans un cas et de triplets dans l'autre.

- à l'extérieur de la cible, en utilisant un champ magnétique associé à des détecteurs de particules adaptés à l'énergie étudiée (Geiger, scintillateurs, Cérenkôw).

Le deuxième cas, celui de la technique de mesure de l'absorption d'un rayonnement, ne permet d'atteindre que la section totale.

Ces techniques sont utilisables aux moyennes et grandes énergies, mais ne le sont plus près du seuil. On comprend facilement que la méthode d'absorption doit être éliminée, puisque le coefficient total d'absorption reste pratiquement constant, alors que la section de création d'électrons diminue très rapidement (tableau II-1) jusqu'à s'annuler. Quant aux difficultés de mesurer la section différentielle, elles sont liées à la faiblesse de sa valeur numérique aggravée par la nécessité d'utiliser une cible très mince pour éviter l'absorption des électrons dans la cible.

Les mesures effectuées entre 2 et 3 MeV utilisent une technique tout à fait différente : la création est détectée par les deux quanta de 511 KeV émis dans l'annihilation ultérieure du positon dans la cible. Cette méthode permet d'utiliser des cibles d'épaisseur suffisante pour que le phénomène soit observable. Une variante de cette méthode consiste à utiliser pour cible un scintillateur, ce qui permet alors d'analyser l'énergie totale de la paire d'électrons (spectromètre à paires). Le phénomène est ainsi identifié d'une façon plus complète. Ainsi GRIFFITHS et autres (GR 52) ont pu séparer les deux "pics de paires" du Co^{60} (figure II-30) et donner le rapport des sections correspondant à ces deux énergies.

Le fait que certains des isotopes indispensables à notre étude expérimentale émettent non pas un, mais plusieurs rayonnements participant à la matérialisation (Fe^{59} Co^{60} Na^{24}) nous a incité à choisir la technique du spectromètre à paires, type scintillations. Il semble d'autre part que l'identification du phénomène par cette méthode est meilleure que par l'emploi d'une cible inerte, où les conditions géométriques certainement plus critiques paraissent être la cause principale des désaccords existant entre les diverses mesures. Bien entendu le fait d'utiliser une cible épaisse complique énormément la détermination de l'efficacité de détection des photons de 511 KeV puisqu'il faut maintenant déterminer cette efficacité en chaque point du volume-cible.

Nous étudierons successivement :

- Le dispositif expérimental réalisé, du type spectromètre à paires (chapitre I)

- Le mode de détermination de la section totale de création de paires d'électrons par ce dispositif (chapitre II)

CHAPITRE I

REALISATION DU SPECTROMETRE

I - PRINCIPE

Le spectromètre à paires du type à scintillations est un montage de trois compteurs à scintillations, dans lequel l'un des scintillateurs est irradié par un rayonnement γ d'énergie k et absorbe donc une partie de l'énergie des paires d'électrons créés. Les deux autres compteurs détectent les deux quanta de 511 KeV émis lors de l'annihilation du positon et un circuit électronique permet d'analyser l'énergie perdue dans la cible par la paire d'électrons, qui au maximum est égale à $k-2$. Pratiquement on obtient ainsi un pic, dit " pic de paires " d'énergie facilement mesurable, ce qui permet de déterminer l'énergie k du rayonnement primaire. Nous montrerons comment la connaissance de ce pic peut dans certaines conditions donner la section efficace de production de paires, mais auparavant nous allons décrire l'appareillage réalisé en tenant compte des difficultés posées par la détection de la matérialisation près du seuil.

II - DETECTION PRES DU SEUIL

La section de production de paires σ diminue très rapidement près du seuil, tandis que les autres interactions (principalement l'effet Compton) ayant lieu dans le scintillateur ont une importance beaucoup plus grande.

Nous donnons dans le tableau II.1 les valeurs du coefficient d'absorption par création de paires σ et du coefficient total μ ainsi que leur rapport ($N_A I$)

E (MeV)	1,02	1,1	2	3	5	10
σ (cm ⁻¹)	0	$0,2 \cdot 10^{-4}$	0,01	0,022	0,05	0,09
μ (cm ⁻¹)	0,2	0,2	0,15	0,13	0,13	0,14
σ/μ	0	10^{-4}	0,07	0,17	0,4	0,63

TABLEAU II.1

Il est visible que si la détection ne pose pas de problème pour les énergies supérieures à 3 MeV, il n'en est pas de même près du seuil, où la matérialisation est masquée par les autres processus d'absorption. Pour la mettre en évidence il faudra donc utiliser le maximum d'informations caractéristiques du phénomène. L'identification des photons d'annihilations doit être très complète et porter sur les trois aspects suivants :

- énergétique : quanta de 511 KeV
- géométrique : quanta émis dans des directions opposées
- chronologique : simultanéité de l'émission des 2 quanta.

Malheureusement, il est évident que plus cette identification est bonne plus l'efficacité de détection est restreinte, ceci au détriment du taux de comptage final.

La solution pratique ne peut résulter que d'un compromis et c'est pour cette raison que nous n'avons employé qu'un seul couple de détecteurs, ce qui oblige à sacrifier la définition angulaire afin de conserver une efficacité acceptable.

III - DESCRIPTION DU SPECTROMETRE

Le montage réalisé (tableau II.2) comprend un spectromètre du type lent - rapide, formé par les compteurs à scintillations 2 et 3, les sélecteurs d'amplitude et les circuits de coïncidences, et dont le rôle est de détecter les quanta d'annihilation.

Il déclenche une porte linéaire, dont l'ouverture permet d'analyser l'énergie recueillie dans le détecteur 1, au moyen d'un sélecteur d'amplitude à 10 canaux.

Les scintillateurs 2 et 3 sont des cristaux de NaI (TI) cylindriques, de dimensions : $L = 5,08$ cm. $\varnothing = 5,08$ cm. Leur résolution à 660 KeV est voisine de 9%. Le scintillateur cible est lui aussi un cristal cylindrique de NaI (TI) de dimensions $L = 3,81$ cm $\varnothing = 2,54$ cm.

Les trois photomultiplicateurs sont du type R.C.A. 6810 A à 14 étages. Les impulsions négatives de l'anode attaquent le système de coïncidences rapide après avoir été standardisées, tandis que les impulsions destinées à l'analyse énergétique sont prélevées sur la dernière dynode par l'intermédiaire d'un étage cathodyne.

Les durées de comptage devant être longues, de l'ordre de plusieurs dizaines d'heures, nous avons réalisé des circuits électroniques possédant une grande stabilité.

IV - SELECTEURS D'AMPLITUDE (Fig.II.1)

La description s'applique à la fois au sélecteur à 10 canaux et aux sélecteurs à bande réalisés sur le même principe : n seuils reliés par un système d'anticoïncidences.

Le signal à analyser est injecté à travers une pentode 6 AK5, attaque ensuite une diode dont la polarisation variable fixe le seuil, puis est transmis après amplification à un univibrateur formé par une pentode à émission secondaire EFP 60 dont la dynode est couplée à la grille par une capacité réglable et une diode 0A 73.

Le signal de sortie (15 V; 0,5 μ sec.) est recueilli sur la plaque du tube EFP 60. Pour compenser le décalage des signaux délivrés par deux voies adjacentes, il est dérivé sur la plaque d'un univibrateur 6J6. En l'absence de signal du seuil

supérieur, l'impulsion positive obtenue débloquent le tube suivant 6J6.

Les caractéristiques générales sont :

- Polarité des signaux d'entrée: positive .
- Temps de montée des signaux admissibles : $25 \cdot 10^{-9}$ à 10^{-6} sec.
- Durée : 0,1 à 2 μ sec.
- Dérive: inférieure à 1 % (300 heures de fonctionnement)

V - SYSTEMES DE COINCIDENCES (Figure II.2)

1) Système rapide

C'est un circuit à diode, basé sur le principe de superposition d'impulsions préalablement standardisées par un câble coaxial de 50 Ω court circuité. Les impulsions ont une amplitude de 0,25 V, une largeur à la base réglable entre 10^{-8} et $5 \cdot 10^{-8}$ sec. et attaquent le circuit rapide qui est simplement un analyseur d'amplitude.

L'emploi de gros scintillateurs couplés à toute la surface de la photocathode nous a conduit à utiliser un temps de résolution très modéré : $2\tau = 4 \cdot 10^{-8}$ sec.

2) Système lent

Les impulsions d'entrée sont standardisées (10 V, 1,5 μ sec.) puis bloquent trois pentodes 6AK5 montées avec une résistance de charge commune. Le signal résultant de coïncidences triples est sélectionné par un univibrateur 6J6, qui déclenche l'ouverture de la porte. Le temps de résolution varie entre 1,2 et 1,5 μ sec.

VI - CIRCUIT PORTE (Fig.II.3)

Le signal de commande déclenche deux univibrateurs qui donnent des signaux rectangulaires de polarité opposée (EI80F,

ECC 88). Le signal positif et l'impulsion d'entrée sont mélangés dans deux tubes 6AK5 montés en série. Le signal résultant déclenche un tube bloqué, ce qui permet la transmission de l'impulsion d'entrée en présence du signal de commande. D'autre part, le retard entre les signaux de commande et d'entrée est compensé par un cable de grande impédance (1000Ω) qui retarde l'impulsion à transmettre de 2 μ sec.

CHAPITRE II

DETERMINATION DE LA SECTION TOTALE DE CREATION DE PAIRES DANS UN CRISTAL DE NaI (TI)

MATERIAISATION ET ANNIHILATION

Le spectromètre réalisé détectant la matérialisation de l'énergie par le processus consécutif d'annihilation du positon en deux photons de 511 KeV, il nous faut préciser comment ces deux phénomènes sont reliés, afin de pouvoir mesurer la section efficace du premier, et pour cela nous devons analyser le comportement d'une paire d'électrons créés dans la cible.

L'électron perd son énergie à la suite de collisions inélastiques et de l'émission d'un rayonnement de freinage, qui en général n'est pas absorbé complètement dans la cible. Cependant pour les énergies de l'électron inférieures à 5 mc^2 l'émission de ce rayonnement est négligeable, et nous n'en tiendrons pas compte. Dans ce cas, les valeurs des parcours moyens de l'électron dans NaI montrent qu'on peut admettre, compte tenu des dimensions de la cible et du domaine d'énergie étudié, que l'absorption de l'énergie cinétique de l'électron dans le scintillateur-cible est complète (II.1)

(II.1)	E (MeV)	0,350	1	2
	parcours (mm)	0,3	1,2	3

L'électron positif subit une absorption analogue compliquée d'une annihilation susceptible de prendre plusieurs formes suivant l'état du négaton avec lequel elle a lieu.

a) Avec un électron libre

Le positon peut s'annihiler en donnant naissance à deux quanta. En fait, il existe une certaine probabilité d'annihilation en plus de deux quanta, mais beaucoup plus faible : la section correspondant à 3 quanta par exemple, n'atteint que quelques millièmes de la section σ_2 relative à l'annihilation en 2 quanta :

$$(II.2) \quad \sigma_3 = \frac{1}{370} \sigma_2$$

L'annihilation en deux quanta présente d'autre part des aspects différents suivant l'énergie cinétique que possède le positon à l'instant de son annihilation. La section σ_2 offre en effet la particularité de diverger lorsque la vitesse du positon s'annule :

$$(II.3) \quad \sigma_2 \propto \pi r_0^2 \frac{c}{v_+} \quad \text{cm}^2 / \text{électron}$$

Il en résulte que les positons de très faible énergie ont une vie moyenne τ dans un milieu de densité d'électrons libres D donnée par :

$$(II.4) \quad \tau = (D \pi r_0^2 c)^{-1}$$

Dans ce cas, les deux quanta se partagent également l'énergie et l'impulsion du système (e^+, e^-), et sont donc émis à 180° l'un de l'autre avec une énergie de 511 KeV.

Il n'en est pas de même lors de l'annihilation d'un positon plus énergétique. Dans ce cas l'émission n'est plus isotrope : l'un des quanta est émis en arrière avec une énergie de 511 KeV. L'autre en avant avec une énergie égale à celle du positon. Ce processus est peu fréquent et sa probabilité ne dépasse jamais 4 % de la probabilité d'annihilation du positon au repos.

b) Avec un électron lié

Le positon donne naissance à un seul quantum. La section correspondant à l'annihilation avec un électron de la couche

K est :

$$(II.5) \quad \phi_{1,K} = \frac{4\pi r_0^2}{3} \frac{Z^5}{137^4} \frac{p_+}{mc} \quad \text{où } p_+ \text{ est le moment linéaire du positon.}$$

Elle s'annule avec l'énergie cinétique du positon et passe par un maximum pour $E_+ \simeq 2 (mc^2)$. Cependant, sa valeur est toujours faible. Ainsi pour le plomb ($Z = 82$) où le phénomène est le plus important, les rapports $\phi_{1,K}/\phi_2$ sont donnés dans le tableau II.6

(II-6)	$E_+ - 1$	0,1	1
	$\phi_{1,K} / \phi_2$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-2}$

En conclusion, compte tenu des valeurs des autres sections d'annihilation, nous admettrons que dans le domaine d'énergie étudié et pour les cibles utilisées, l'annihilation d'un positon ne donne naissance qu'à 2 quanta de 511 KeV émis à 180° l'un de l'autre.

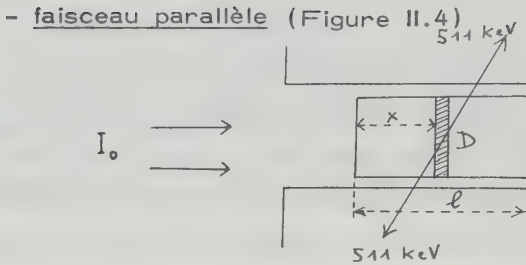
A - CARACTERISTIQUES DU SPECTROMETRE

I - Théorie de la mesure des sections efficaces

Pour établir la relation existant entre le nombre de paires détectées et la section efficace nous devons tenir compte à la fois de l'atténuation progressive du faisceau pénétrant dans le scintillateur et de l'efficacité de détection simultanée des photons de désintégration.

a) Influence de la forme géométrique du faisceau.

Nous considérons ici les paires créées uniquement par des photons de même énergie.



I_0 étant le nombre de photons frappant la cible par seconde, μ_0 le coefficient total d'absorption du rayonnement primaire, σ la section de création de paires par molécules de NaI (N par cm^3), le nombre de paires créées dans un cylindre D d'épaisseur dx est :

$$(II.7) \quad a \, dx = I_0 \, e^{-\mu_0 x} \sigma \, N \, dx$$

$S(x)$ désignant l'efficacité de détection des photons de 511 KeV émis à partir de D , le taux de comptage R est donc :

$$(II.8) \quad R = I_0 \, N \, \sigma \int_0^l e^{-\mu_0 x} S(x) \, dx$$

On définit habituellement l'efficacité d'un spectromètre à paires par le quotient :

$$(II.9) \quad \text{Eff} = \frac{R}{I_0} = N \, \sigma \int_0^l e^{-\mu_0 x} S(x) \, dx$$

On peut remarquer que l'efficacité maximum correspondant à $S(x) = 1$ (détecteurs latéraux 4π) est donnée par :

$$(II.10) \quad \frac{N\sigma}{\mu_0} (1 - e^{-\mu_0 l})$$

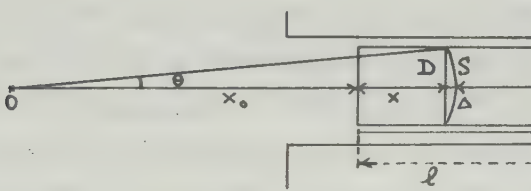
et qu'elle est donc limitée par $\frac{N\sigma}{\mu_0}$ (faisceau initial complètement absorbé), dont quelques valeurs sont données dans le tableau II.1.

Dans la détermination des sections, nous devons rapporter le taux R au nombre d'évènements intéressants qui est non pas I_0 mais $\int adx$, et nous définirons donc l'efficacité par :

$$(II.11) \quad \frac{\int_0^l e^{-\gamma_0 x} S(x) dx}{\int_0^l e^{-\gamma_0 x} dx}$$

Les détecteurs latéraux étant dans le prolongement l'un de l'autre, le champ d'efficacité $S(x)$ est nul à l'extérieur de ce domaine et l'intégration porte sur la longueur l du scintillateur comprise dans ce champ.

- faisceau conique. Source ponctuelle (Figure II-5)



Nous supposons la source placée à une distance x_0 suffisamment grande pour assimiler la calotte sphérique S découpée dans la cible à un disque plan D .

Cette approximation est légitime dès que $x_0 > 6$ cm. (II.12)

	aire D /aire S	θ	Δ	x_0
(II.12)	0,989	12°	1,2 mm	6 cm
	0,9996	2°	0,25 "	37 cm

Le nombre de photons atteignant D sans avoir subi d'interactions est :

$$(II.13) \quad I(x) = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\gamma_0 x}$$

Dans ce cas le taux de comptage R est donné par :

$$(II.14) \quad R = I_0 N \sigma \int_0^l \frac{e^{-\gamma_0 x} S(x)}{\left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^2} dx$$

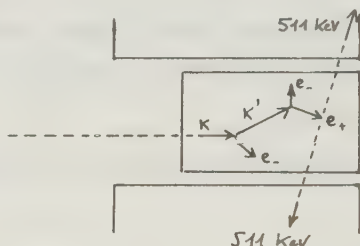
b) Influence de la dégradation énergétique du faisceau

Le taux R représente la contribution des photons dont l'énergie k est celle du faisceau initial. Celui ci se dégrade en traversant la cible épaisse et après plusieurs interactions Compton il possède une certaine distribution qui pour de petits angles de déviation est de la forme :

$$(II-15) \quad F(x, k', \theta') = f(x, k') e^{-\frac{1}{2} \theta'^2 \frac{k k'}{k - k'}} e^{-\gamma_0 x}$$

Or, ces photons participent au " pic de paires " du rayonnement primaire. En effet, si une matérialisation est produite par un photon d'énergie k' obtenu après n interactions Compton, le spectromètre analysera la somme des énergies des n électrons de recul $k - k'$ et de la paire créée $k' - 2$, soit $k - 2$.

(Figure II.6)



Nous devons donc calculer l'importance de leur contribution.

Pour éviter la complexité du calcul dans le cas général, nous nous sommes contentés d'examiner l'influence d'une seule interaction Compton donnant un photon d'énergie k' diffusé sous un angle θ tel que :

$$(II.16) \quad 1 - \cos \theta = \frac{k - k'}{k k'}$$

Si $k - k'$ est faible on obtient :

$$\theta d\theta = - \frac{dk'}{k'^2}$$

et la section différentielle de diffusion dans $d\theta$ est par

électron :

$$(II.17) \quad d\sigma^e \approx 2\pi r_0^2 \theta \, d\theta \approx -2\pi r_0^2 \frac{dk'}{k'^2}$$

Le nombre de photons d'énergie k' diffusés à l'intérieur du détecteur est :

$$(II.18) \quad I_0 \frac{NZ}{\gamma_0} (1-e^{-\gamma_0 \ell}) d\sigma^e = \frac{-2\pi r_0^2 I_0 NZ}{\gamma_0} (1-e^{-\gamma_0 \ell}) \frac{dk'}{k'^2}$$

NZ désignant le nombre d'électrons par cm^3 .

Comme la section Compton est de l'ordre de πr_0^2 par électron pour un photon d'énergie comprise entre 1 et 1,5 MeV, et qu'on peut l'assimiler au coefficient d'absorption total, le nombre de paires créées par les photons faiblement diffusés dans le scintillateur s'évalue aisément, soit :

$$(II.19) \quad n' = 2 I_0 (1-e^{-\gamma_0 \ell}) \int_2^K N \sigma(k') \frac{dk'}{k'^2}$$

Près du seuil nous ne connaissons pas la loi exacte de variation de $\sigma(k')$ mais la décroissance de la section impose :

$$(II.20) \quad \frac{\sigma(k')}{\sigma(k)} < \frac{k' - 2}{k - 2}$$

et nous pouvons calculer le rapport existant entre les n' paires créées par les photons dégradés et les n créées par le rayonnement primaire, soit :

$$(II.21) \quad \frac{n'}{n} = 2\gamma_0 \int_2^K \frac{\sigma(k')}{\sigma(k)} \frac{dk'}{k'^2} < \frac{\gamma_0}{2} (k-2)$$

$$\frac{n'}{n} < \frac{k-2}{10}$$

La contribution des photons diffusés apparaît donc dans ces conditions, négligeable, pour les faibles valeurs de k .

Ce fait est important, car en spectrométrie γ une raie est rarement due à une interaction unique ; le pic photoélectrique par exemple a pour origine aussi bien un effet photoélectrique qu'une interaction Compton accompagnée de l'absorption de l'électron de recul et du photon diffusé.

Dans un spectromètre à paires, au contraire, les pics obtenus correspondent uniquement à la matérialisation du photon primaire ; aux grandes énergies, car ce phénomène est l'interaction la plus fréquente (l'effet Compton est alors faible) et près du seuil où bien que l'effet Compton soit prépondérant, seule une infime partie des photons ainsi diffusés peut encore créer des électrons, et ceci avec une section fortement diminuée. C'est pourquoi la connaissance de l'aire d'un pic suffit, compte tenu des paramètres d'efficacité du spectromètre, à déterminer la section correspondant à cette énergie.

II - Détermination expérimentale de l'efficacité de détection des rayonnements d'annihilation

a) Efficacité de détection.

La détermination de σ nécessite la connaissance exacte de $S(x)$, qui est reliée à la probabilité de détection $A(M)$ d'un couple de γ émis d'un point M du disque D par la relation :

$$(II.22) \quad S(x) = \frac{1}{D} \int_D A(M) \, dM$$

La détermination de $S(x)$ se ramène donc à la détermination de la probabilité de détection simultanée d'un couple de γ d'annihilation. Cette probabilité dépend du point où est émis le couple, c'est à dire de la géométrie complète du spectromètre : scintillateurs latéraux et détecteur central. (Figure II-7)

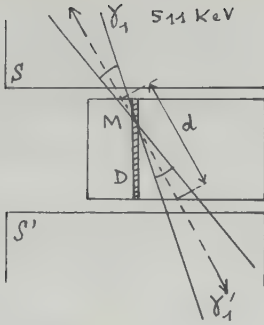


Figure II-7

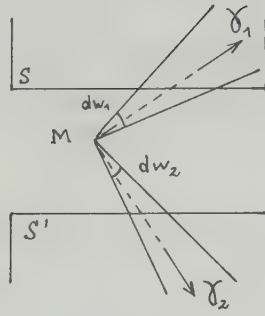


Figure II-8

Pour pouvoir la déterminer, nous allons être amenés à préciser quelques notions sur l'efficacité photoélectrique absolue d'un scintillateur. Considérons une source monochromatique d'activité N , placée en un point M . Un scintillateur fournit de cette source un spectre, dont on sélectionne une certaine bande d'énergie Δ , en principe le pic photoélectrique. L'efficacité absolue de détection dans cette bande, sera par définition :

$$(II-23) \quad \epsilon = \frac{N_{\Delta}}{N} \quad N_{\Delta} \text{ nombre de coups détectés dans } \Delta$$

ϵ est fonction de la position de la source et de son énergie, et du volume de détection utilisé.

En fait, toute radiation émise dans un angle dw possède une probabilité $\alpha(w)$ d'être absorbée dans la bande considérée. L'émission étant isotrope la probabilité d'émission dans dw et d'absorption dans Δ est :

$$(II.24) \quad \alpha(w) = \frac{dw}{4\pi}$$

La probabilité totale représente l'efficacité, soit :

$$(II.25) \quad \epsilon = \frac{1}{4\pi} \int \alpha(w) dw$$

Considérons alors une émission simultanée de deux γ sans corrélation angulaire. (Figure II.8) La probabilité de détection simultanée de γ_1 dans S et γ_2 dans S' est le produit

des efficacités :

$$(II.26) \quad \int \alpha_1(w_1) \frac{dw_1}{4\pi} \alpha_2(w_2) \frac{dw_2}{4\pi} = \epsilon_1 \epsilon_2$$

Ce n'est plus le cas si l'angle d'émission des deux γ est déterminé, car pour une émission de γ_1 dans dw , le cône d'émission de γ_2 est parfaitement déterminé, et l'efficacité de détection simultanée est :

$$(II.27) \quad \int \alpha_1(w_1) \frac{dw_1}{4\pi} \alpha_2[w_2(w_1)]$$

L'efficacité de détection simultanée de " γ_1 ou γ_2 " dans S et " γ_2 ou γ_1 " dans S' est évidemment deux fois plus grande :

$$(II.28) \quad \frac{1}{2\pi} \int \alpha_1 \alpha_2 dw$$

Dans le cas de rayonnements d'annihilation, leur détection simultanée est ainsi donnée par :

$$(II.29) \quad B = \frac{1}{2\pi} \int \alpha \alpha' dw$$

Cette relation montre qu'il est impossible d'exprimer B en fonction de ϵ . Ce coefficient devra donc être déterminé expérimentalement. Voyons alors comment A et B sont reliés. A représente la détection simultanée dans les scintillateurs latéraux des γ de 511 KeV émis dans le scintillateur central donc ayant traversé une distance d dans la cible, soit :

$$(II.30) \quad A(M) = \frac{1}{2\pi} \int \alpha \alpha' e^{-\mu d} dw$$

On voit ainsi qu'il n'y a pas de relation simple entre A et B. Par conséquent, il faudra déterminer expérimentalement A en chaque point du scintillateur central. Une telle mesure ne peut être rendue possible qu'en réalisant un absorbant

géométriquement identique au cristal de NaI (TI), de même coefficient d'absorption linéaire à 511 KeV, et dans lequel on puisse déplacer une source de positons.

Réalisation d'un absorbant équivalent au détecteur central.

Nous avons utilisé un cylindre de dimensions $L = 3,81$ cm $\varnothing = 2,54$ cm, traversé parallèlement à sa génératrice par six tubulures creuses ($\varnothing = 3$ mm) dont les distances à l'axe de révolution sont respectivement :

$$\begin{aligned} r_1 &= 1,25 \text{ cm} & r_2 &= 1,15 \text{ cm} & r_3 &= 1 \text{ cm} & r_4 &= 0,7 \text{ cm} \\ r_5 &= 0,45 \text{ cm} & r_6 &= 0 \end{aligned}$$

Ce dispositif (Figure II.9) permet ainsi de déplacer l'échantillon radioactif (logé dans un tube capillaire) à l'intérieur du cylindre, en différents points M de coordonnées (r, θ, x)

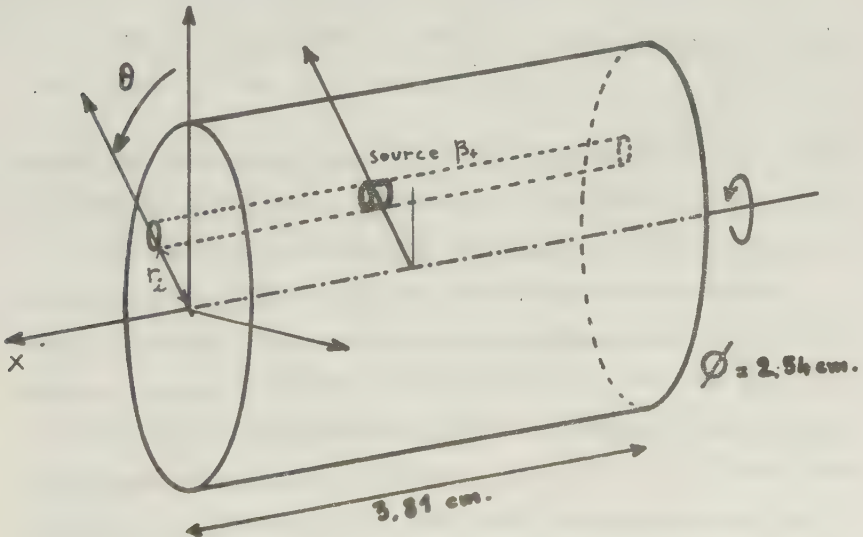


Figure II-9

D'autre part le cylindre est rempli d'une certaine quantité d'iode (sous forme de poudre cristalline) lui donnant le coefficient d'absorption désiré. La détermination de cette quantité

s'obtient en remarquant que dans un mélange de deux corps, dont le coefficient d'absorption μ et la densité ρ sont donnés, on a (a_1 et a_2 désignant les quantités pondérales des 2 corps) :

$$(II.31) \quad \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu_1}{\rho_1} \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \frac{a_2}{a_1 + a_2}$$

Il en résulte que si V est le volume du mélange, a_1 et a_2 sont donnés par :

$$(II.32) \quad \begin{aligned} a_1 &= V \rho_1 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \\ a_2 &= V \rho_2 \frac{\mu - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \end{aligned}$$

Les valeurs des coefficients d'absorption à 511 KeV dans I et Na I, conduisent à : $a_2 = V \rho_2 \frac{\mu}{\mu_2} = 3,575 V$

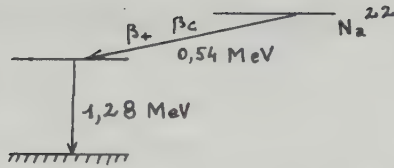
$$(II.33) \quad E_\gamma = 511 \text{ KeV} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_2}{\rho_2} = 0,0954 \text{ cm}^2/\text{g} \text{ pour I} \\ \mu = 0,341 \text{ cm}^{-1} \text{ pour Na I} \end{array} \right.$$

Nous avons vérifié expérimentalement que l'absorption de rayonnement de 511 KeV dans le scintillateur cible était identique à celle obtenue dans l'absorbant réalisé par cette méthode.

Nous avons ensuite effectué une série de mesures de l'efficacité en employant successivement comme sources de positons des solutions de Na^{22} , puis de Cu^{64} . Certaines de ces mesures ont été faites en l'absence d'absorbant, et permettaient ainsi de connaître les coefficients relatifs aux détecteurs latéraux seulement ; les mesures définitives tenant compte de l'absorption dans le détecteur central.

b) Mesures effectuées à l'aide du Na^{22}

La désintégration du Na^{22} se fait par émission β_+ (0,89) ou par capture d'un électron et conduit à un état excité donnant naissance à un γ de 1,28 MeV. (Figure II.10)



L'existence de celui ci ne permet pas de mesurer directement A ou B par des coïncidences 511 KeV $\longleftrightarrow$ 511 KeV.

En effet l'absorption simultanée de 511 KeV et 1,28 MeV dans un détecteur est d'autant plus importante que la source est rapprochée et dans ces conditions, en désignant par ξ_1 l'efficacité à 511 KeV et ξ_2 l'efficacité à 1,28 MeV, un spectre du Na^{22} aura trois bandes d'énergie intéressantes avec des taux de comptage :

$$\begin{aligned}
 N_{12} &= 2 \times N \xi_1 \xi_2 & E_{12} &= (1,28 + 0,51) \text{ MeV} \\
 (II.35) \quad N_2 &= N \xi_2 + K_1 & E_2 &= 1,28 \text{ MeV} \\
 N_1 &= 2 \times N \xi_1 + K_2 & E_1 &= 0,51 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

(N activité de la source, $2Nx$ nombre de photons de 511 KeV, $x = 0,89$).

K_1 est la contribution de γ_1 à la bande d'énergie E_2 , et comprend deux termes de signes opposés dus à une absorption non totale de γ_1 et γ_2 , et à une absorption totale de γ_2 coïncidant avec une absorption incomplète de γ_1 .

K_2 est la contribution de γ_2 à la bande d'énergie E_1 soit :

- (additive) absorption incomplète de γ_2 seul, ou de γ_2 et γ_1
- (soustractive) absorption incomplète de γ_2 coïncidant avec une absorption totale de γ_1 .

L'allure du spectre se simplifie lorsque la source est éloignée, car la probabilité p d'émission simultanée de γ_1 et γ_2 dans un même angle solide Ω décroît avec Ω :

$$(II.36) \quad \frac{p(\gamma_1 \gamma_2)}{p(\gamma_2)} = p(\gamma_1) = \frac{\Omega}{2\pi}$$

$$\frac{p(\gamma_1 \gamma_2)}{p(\gamma_1)} = p(\gamma_2) = \frac{\Omega}{4\pi}$$

Pratiquement à une distance de 15 cm d'un scintillateur de 2".2" on obtient $p(\gamma_2) \simeq 10^{-2}$.

Les pics photoélectriques sont alors :

$$(II.37) \quad \begin{aligned} N_2 &= N \xi_2 & 1,28 \text{ MeV} \\ N_1 &= 2N \times \xi_1 + K_2 & 0,51 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Aussi lorsque les deux scintillateurs sont éloignés, le taux de coïncidences 511 KeV $\leftrightarrow$ 511 KeV n'est pas affecté par γ_2 et la détermination de B est directe. (Figure II.10)

Tandis que s'ils sont rapprochés, il faut de plus tenir compte de la diffusion Compton de 1,28 MeV d'un scintillateur dans l'autre. A la limite, les deux détecteurs se touchant, chacun peut être assimilé à un détecteur 2π , et toute l'énergie émise est absorbée, soit 2,3 MeV distribuée entre les deux détecteurs. Le taux de comptage des coïncidences 511 KeV 511 KeV serait alors nul. (Figure II-11)

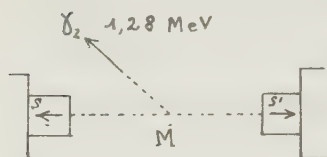


Fig.II-10 $N_{11'} = NB$

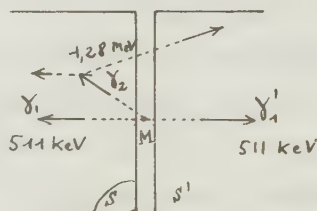


Fig.II-11 $N_{11'} = 0$

Or, il nous faut déterminer B dans une région intermédiaire où l'influence du 1,28 MeV est importante et ne peut être appréciée directement. Pour éliminer cette contribution indésira-

ble, nous utiliserons deux séries de coïncidences.

- Coïncidences $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma'_2$

S en position finale, S' éloigné

Le taux de coïncidences entre E_1 et E'_2 est :

$$M = 2 N \times \xi_1 \xi'_2$$

car dans cette position il ne peut y avoir de fausses coïncidences.

Une étude du spectre de S' indique dans la bande E'_2 un nombre :

$$N'_2 = N \xi'_2$$

On en déduit :

$$(II.38) \quad \xi_1 = \frac{M}{2 N'_2 \times}$$

Remarque

Il n'est pas nécessaire de limiter la bande d'énergie E'_2 au pic photoélectrique pour mesurer ξ_1 . Il suffit que cette bande permette de différencier γ_2 et γ_1 et par conséquent comprenne des énergies supérieures à 0,5 MeV.

- Coïncidences $(\gamma_1 + \gamma_2) \leftrightarrow \gamma'_1$

S' et S en position finale.

Les coïncidences entre les bandes $E_1 + E_2$ et E'_1 représentent nécessairement le phénomène étudié et l'élimination des fausses coïncidences est totale.

Le spectre de S donne $N_{12} = 2 N \xi_1 \xi_2 \times$

Le taux de coïncidences est $N_c = N B \xi_2 \times$

On en déduit :

$$(II.39) \quad B = \frac{2 N_c}{N_{12}} \xi_1$$

ξ_1 ayant été déterminé par la méthode précédente, ces deux mesures donnent rigoureusement l'efficacité de détection simultanée de γ_1 et γ_1' .

Influence de l'absorption dans le détecteur central.

La source étant placée dans l'absorbant, toutes les relations précédentes subsistent ; ξ_{1a} désignant alors l'efficacité en présence de l'absorbant :

$$(11.40) \quad \xi_{1a} = \left(\frac{M}{2 N_1' x} \right)_a \quad A = \left(\frac{2 N_c}{N_{12}} \right)_a \xi_{1a}$$

Détermination de ξ_1 . (Figure 11.12)

La source de Na^{22} était contenue dans un tube capillaire de diamètre extérieur 3 mm et s'étendait sur une longueur de 4 mm.

Les mesures ont été faites en la déplaçant de 3 mm en 3 mm suivant la direction d et de 6 mm en 6 mm suivant x.

Le détecteur S' analysant γ_2 était situé à 15 cm de celui analysant γ_1 .

La bande d'énergie de 511 KeV avait une largeur de 180 KeV

La bande d'énergie de 1,28 MeV avait une largeur de 360 KeV

Le taux de coïncidences fortuites était négligeable.

On a ainsi obtenu une série de points s'étendant sur tout le diamètre du détecteur et s'en éloignant jusqu'à 32 mm, (et 60 mm suivant l'axe de révolution). A partir d'une telle distance, les variations de ξ_1 suivant x deviennent faibles.

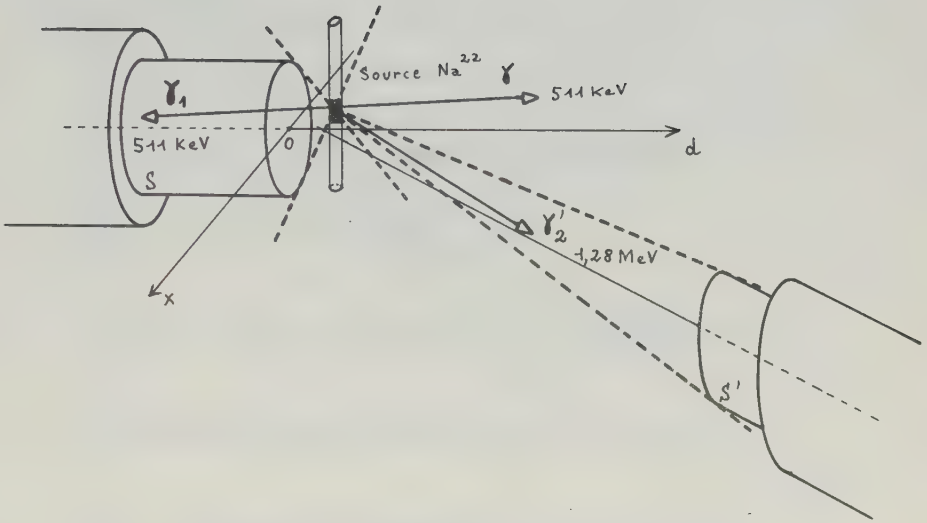


Fig. II-12 - Détermination de l'efficacité ϵ_1
Coïncidences 511 KeV $\longleftrightarrow$ 1,28 MeV

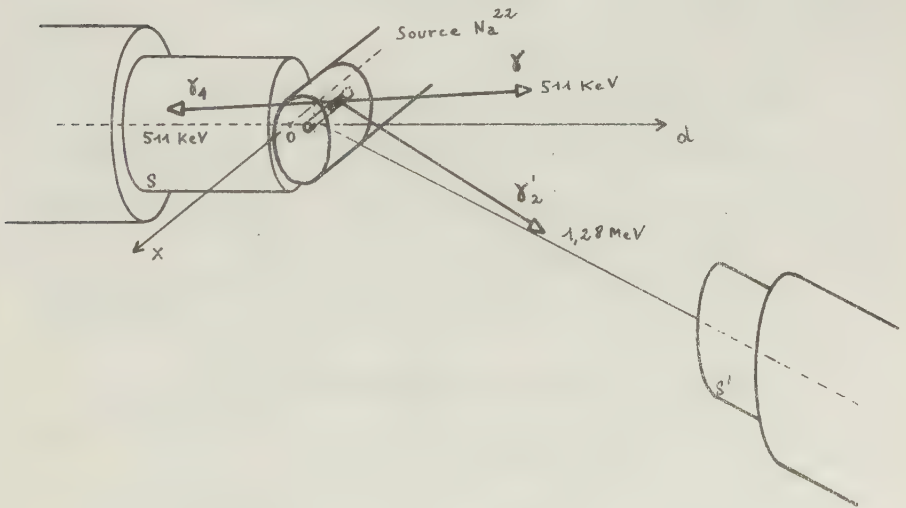


Fig. II-12 bis - Détermination de l'efficacité ϵ_{1a}
Coïncidences 511 KeV $\longleftrightarrow$ 1,28 MeV

$\begin{array}{c} x \\ \backslash \\ d \end{array}$	0	3,5	9,5	15,5	23,5	27,5
2	8,92	8,85	8,5	7,65	5,75	4,35
8	6,25	6,2	5,95	5,35	4,15	3,5
14	4,5	4,45	4,25	3,9	3,3	2,8
20	3,45	3,40	3,2	2,95	2,5	2,2
26	2,80	2,8	2,7	2,5	2,25	2,05
32	2,20	2,2	2,15	2,1	2	1,95

TABLEAU II.3 - Valeurs de $\xi_1(x,d)$ (10^{-2})

Les figures II.13 et II.14 donnent des réseaux de $\xi_1(x,d)$.

La valeur de l'efficacité au centre du spectromètre ($x = 0$ $d = 17$) est :

$$(II.41) \quad \xi_1(0,17) = 3,87 \pm 0,05 \cdot 10^{-2}$$

Détermination de ξ_{12} (Figure II-12 bis)

La position des détecteurs ainsi que le réglage des circuits électroniques n'étant pas modifiés, la source est placée dans le cylindre absorbant.

Les mesures sont effectuées en coordonnées cylindriques:

x variant de 0 à 30 par intervalles de 6 mm

θ variant de 0 à π par intervalles de $\frac{\pi}{6}$

r variant de r_6 à r_1

Les figures 15 et 16 indiquent l'allure d'un tel réseau de courbes.

Détermination de A

S' et S en position finale. (Figure II.17)

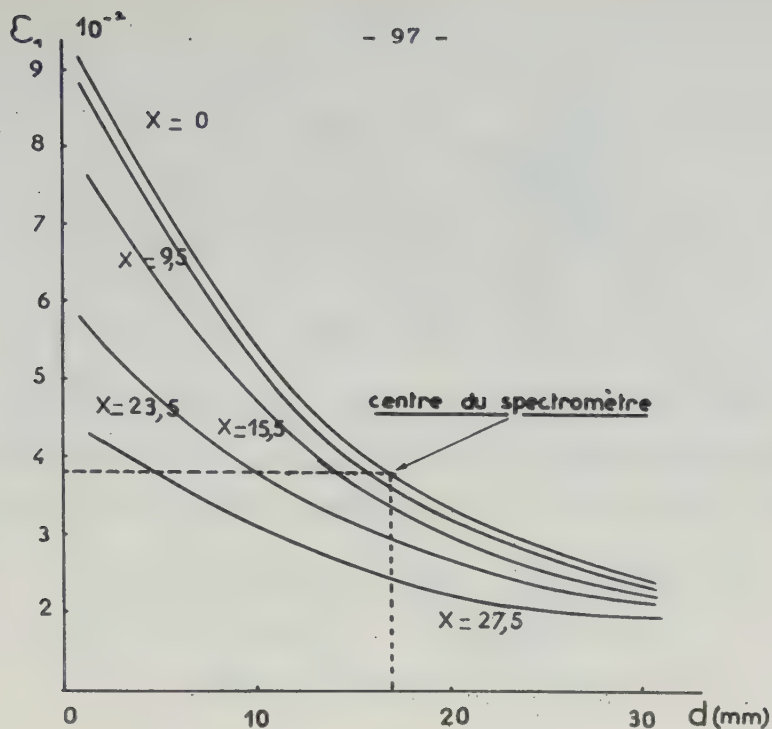


Fig. II-13 - Efficacité ϵ_4 en fonction de d

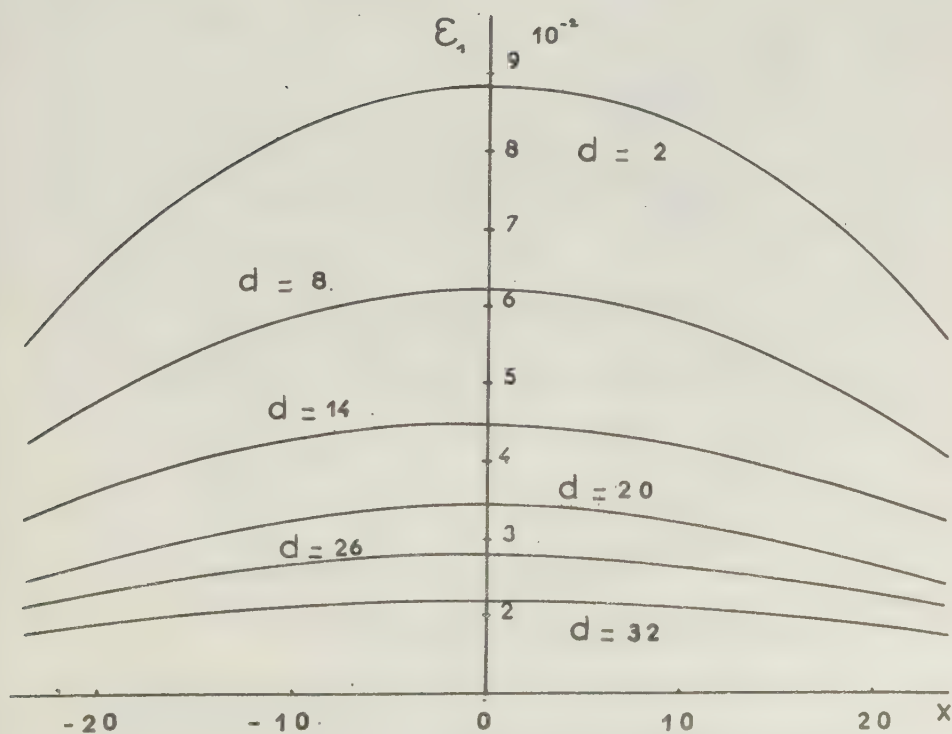
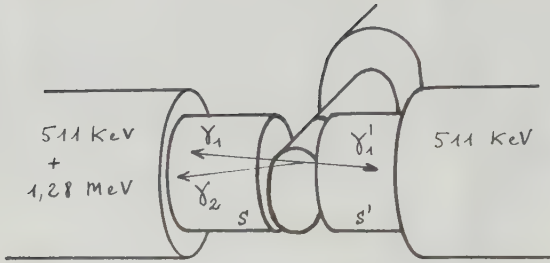


Fig. II-14 - Efficacité ϵ_4 en fonction de x



Les circuits d'analyse sont réglés sur 1,80 MeV et 0,51 MeV.
Nous ne reproduisons ici que quelques valeurs de A. (II.42)

	x = 0			x = 6		
	π	$3\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/4$	$\pi/2$
r ₁	93	76	68	91	72,8	69
r ₄	123	124,4	92	109	115	84
r ₆		130			116	

(II.42)

	x = 12			x = 18		
	π	$3\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/4$	$\pi/2$
r ₁	78	56,4	43,6	46,8	25,9	17,6
r ₄	83	84,2		46	44	36,5
r ₆		87,6			42,6	

Les valeurs correspondantes de $\bar{A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A d\theta$ sont exprimées en 10^{-4} :

TABLEAU II.4 - Valeurs de A

x	0	6	12	18
r ₁	84	80	60	28
r ₄	118,4	100	78	39,2
r ₆	130	116	87,2	42

c) Mesures effectuées à l'aide de Cu⁶⁴.

La désintégration du Cu⁶⁴ se fait par émission β^- , β^+ , et capture β_c (Figure II.18) :

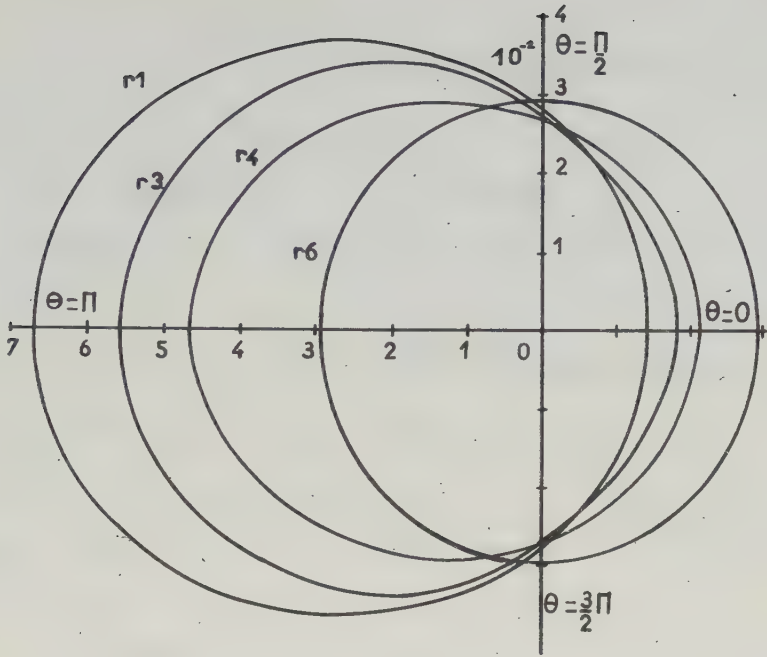


Fig.II-15 - Efficacité ξ_{1a} en fonction de r et θ dans le plan $x = 0$

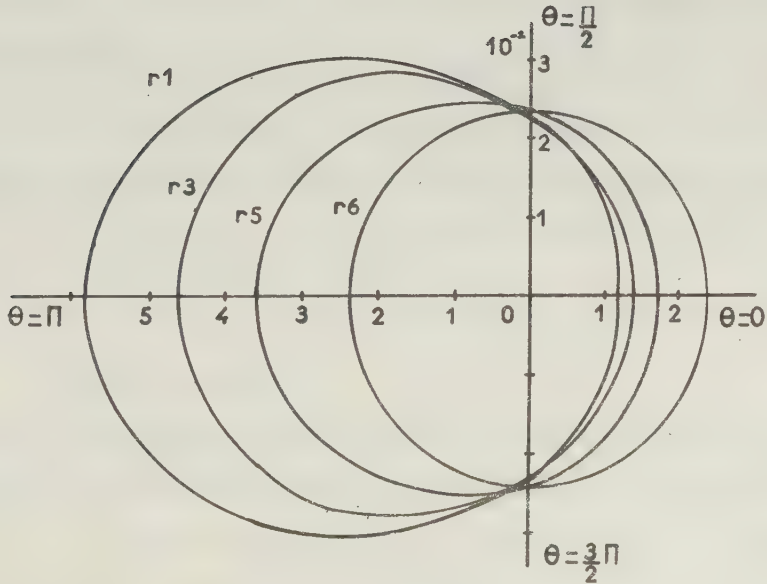
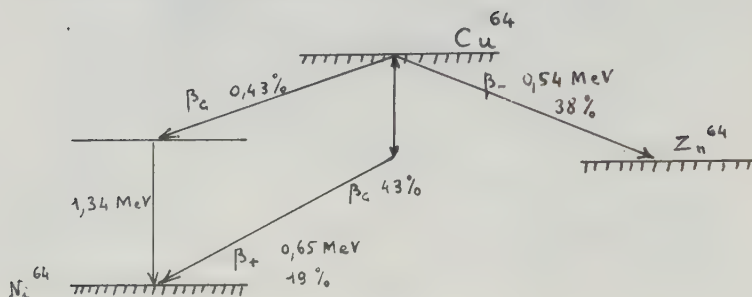


Fig.II-16 - Efficacité ξ_{1a} en fonction de r et θ dans le plan $x = 18$

et capture β_c (Figure II.18) :



On constate l'émission d'un γ de 1,34 MeV, mais à la différence du Na^{22} il n'est pas émis simultanément avec le couple d'annihilation, ("simultanément" s'entend par rapport à l'appareillage électronique) et son importance numérique étant par rapport à ce dernier de 2 %, sa contribution aux taux de coïncidences 0,5 MeV $\longleftrightarrow$ 0,5 MeV est absolument négligeable.

De ce fait la détermination de A est très simple, une fois connu le nombre de γ émis par la source.

Décroissance du Cu^{64}

Nos mesures étalées sur trois jours nous ont permis de mesurer la période du Cu^{64} en suivant l'évolution du nombre de coups enregistrés dans chaque bande d'énergie.

La valeur trouvée $T = 12,88$ heures est en bon accord avec les valeurs admises (DZ 61) :

$$(II.43) \quad T = \begin{cases} 12,8 \pm 0,3 \text{ h} \\ 12,9 \pm 0,06 \text{ h} \end{cases}$$

Nous avons adopté cette valeur moyenne pour tenir compte des corrections de décroissance, on obtient ainsi :

$$(II.44) \quad \lambda = 8,96 \cdot 10^{-4} \text{ minutes}^{-1}$$

La décroissance peut alors s'exprimer sous forme linéaire pendant un laps de temps de deux heures environ sous for-

me :

$$(II.45) \quad N = N_0 (1 - 9 \cdot 10^{-4} t) \quad t \text{ en minutes.}$$

soit une diminution de 1 % en 10 minutes.

La source de Cu^{64} étant dans un tube capillaire analogue à celui de la source Na^{22} , nous avons déterminé, non son activité, mais directement le nombre de couples de γ de 511 KeV émis, à l'aide de l'efficacité ϵ_4 déterminée dans les mesures précédentes et ceci en plusieurs points $x = 0, d = 8, 14, 20, 26, 32, 38$.

La moyenne des mesures permettait de connaître N à 2,5 % :

$$2 N = 16 \cdot 10^5 \text{ coups/minute.}$$

L'irradiation des détecteurs (source centrée) conduisait à des taux de comptage dans la bande de 511 KeV variant de $6 \cdot 10^3$ coups/seconde au début de l'expérience à $0,5 \cdot 10^3$ à la fin. Le rapport du taux de coïncidences fortuites au taux de coïncidences réelles était de 10^{-3} dès le début de l'expérience, donc négligeable.

Nous n'avons pas déterminé A (M) point par point, mais sa valeur intégrée sur les couronnes circulaires de rayons r_1 à r_6 . L'intégration suivant θ se faisait mécaniquement, par la rotation du cylindre couplé à un moteur tournant à 15 tours/minute pendant la durée de la mesure.

Le taux de coïncidences 511 KeV $\longleftrightarrow$ 511 KeV donnait A

d) Valeurs de $S(x)$.

L'accord entre les valeurs A obtenues par les deux méthodes est correct. La détermination directe de A (par le Cu^{64}) est évidemment plus précise. Aussi, avons nous calculé $S(x)$ d'après ces valeurs expérimentales, et compte tenu de ;

$$(II.46) \quad S(x) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} A(xr\theta) r dr d\theta = \frac{2}{R^2} \int_0^R \bar{A}(x,r) r dr$$

TABLEAU II.5 - $10^4 \cdot \overline{A}(x, r)$

x	0	6	12	18	24	30
r_1	101,1	92,24	65,36	30,46	6,88	1,4
r_2	108,2	99,3	70,98	33,38	7,64	1,56
r_3	114,6	105,6	75,74	35,78	8,38	1,72
r_4	121	112,2	78,32	38,76	9,1	1,8
r_5	128,8	119,4	82,30	41,2	10,92	1,96
r_6	133,1	121,7	84,66	43,42	11,22	2,02

La figure II.19 représente les variations de $\overline{A}(x, r)$ en fonction de r

La figure II-20 représente $S(x)$ exprimée en 10^{-4} en fonction de R

En particulier si le faisceau incident englobe complètement la cible, la figure II.21 donne l'allure de S en fonction de x pour $R = 12,7$ mm (rayon du scintillateur cible).

Au centre du spectromètre ($x = 0$, $d = 17$ mm) l'efficacité de détection des rayonnements d'annihilation est :

$$(II.47) \quad \overline{A}(0, 0) = 13,3 \cdot 10^{-3}$$

L'efficacité du spectromètre définie par le rapport du nombre de paires enregistré au nombre de paires créées dans le scintillateur central est :

$$(II.48) \quad \frac{\int_0^L e^{-\gamma_0 x} S(x) dx}{\int_0^L e^{-\gamma_0 x} dx} = 7,5 \cdot 10^{-3} \quad \gamma_0 = 0,2 \text{ cm}^{-1}$$

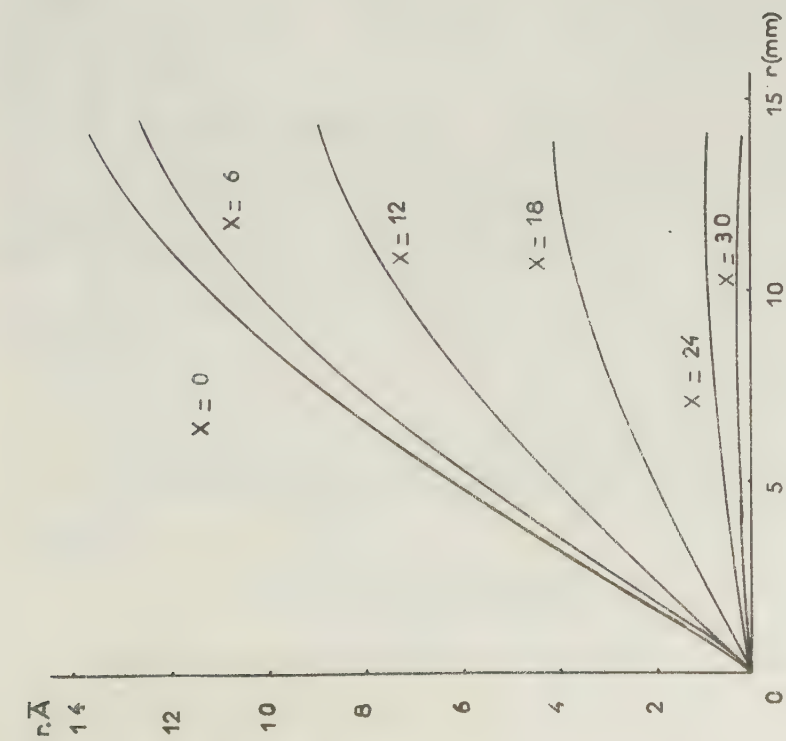


Fig. II-19 - Variations de l'efficacité moyenne $\bar{A}$ en fonction de x et de r .

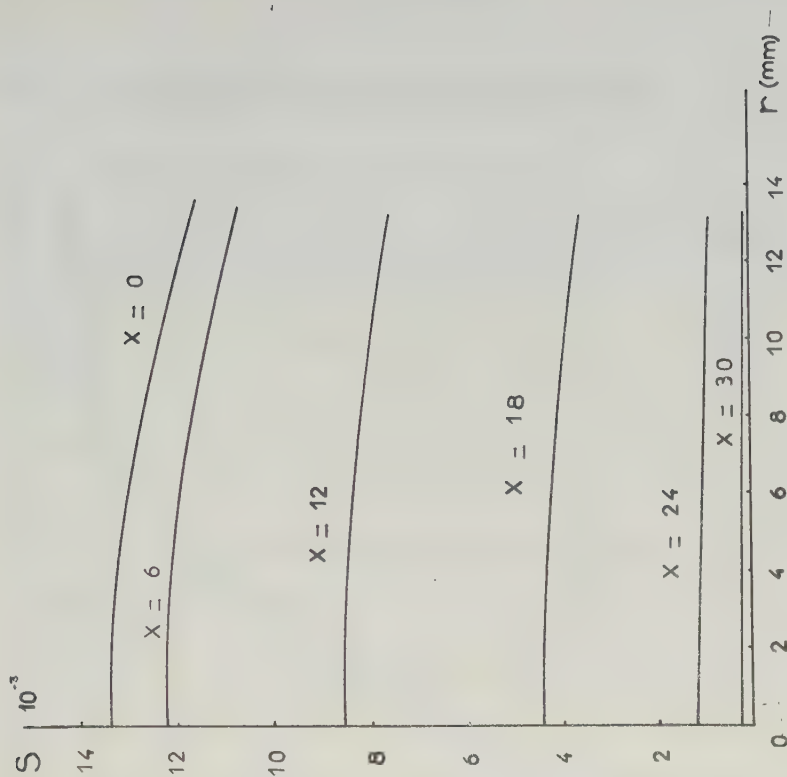


Fig. II-20 - Efficacité totale S en fonction de x et de r .

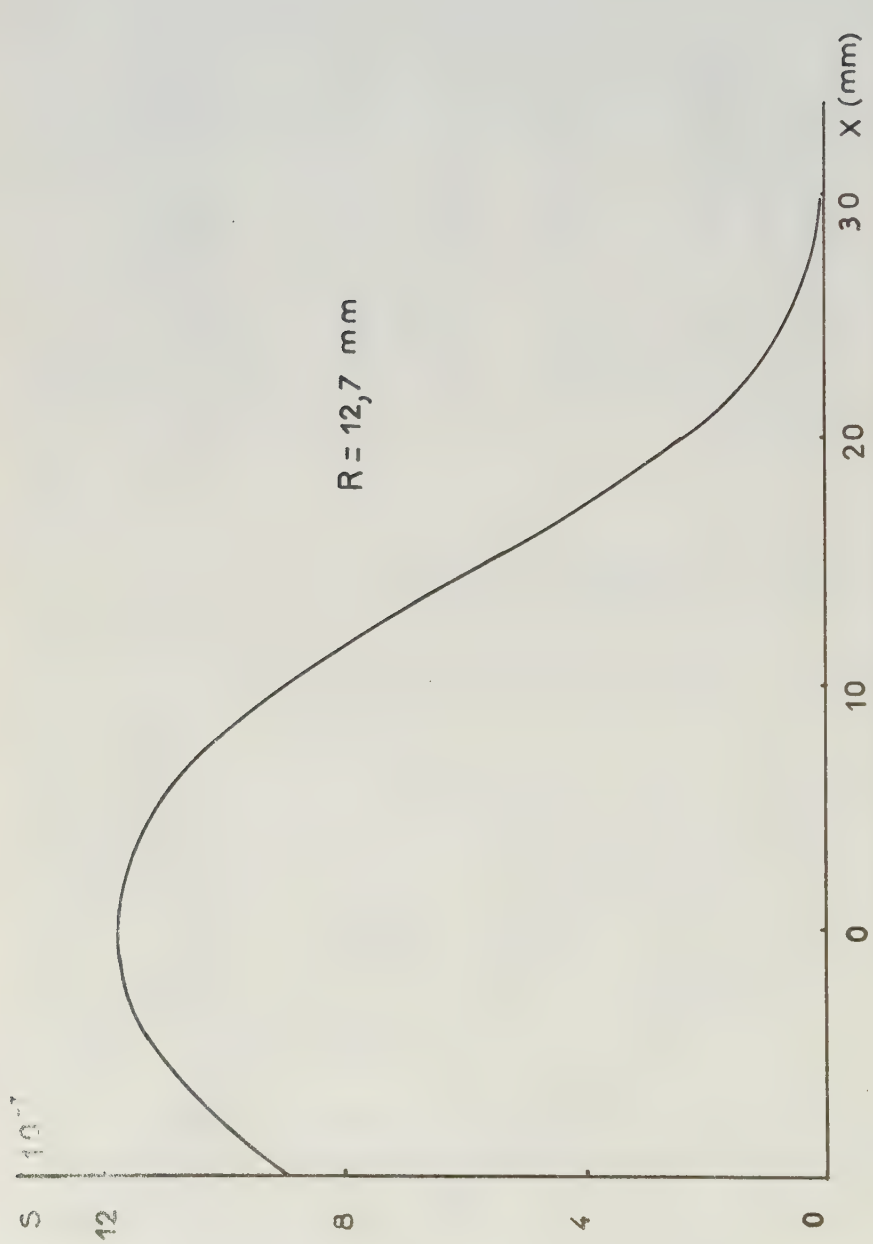


Fig. II-21 - Variations de l'efficacité de détection S du spectromètre ($R = 12,7 \text{ mm}$) en fonction de x .

B - MESURE DES SECTIONS EFFICACES

I - Influence des différents paramètres

Les caractéristiques du spectromètre étant déterminées, la section est obtenue à partir de la relation :

$$(II.49) \quad \sigma(k) = \frac{R}{I_0} \frac{1}{N} \frac{1}{K(x_0)}$$

$$(II.50) \quad K(x_0) = \int_0^l \frac{e^{-\mu_0 x}}{\left(1 + \frac{x}{x_0}\right)^2} dx$$

N désigne le nombre de molécules par cm^3 , soit $N = 1,47 \cdot 10^{22} \text{ mol/cm}^3$. On a donc :

$$(II.51) \quad \sigma(k) = 68 \frac{R}{I_0 K} 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{mol}.$$

La détermination de σ repose ainsi sur celle de quatre grandeurs : k , K , I_0 , R . Nous allons brièvement indiquer l'importance de ces facteurs, et la précision qui en résulte en général sur la section.

a) Energies étudiées

Nous avons utilisé comme émetteurs γ les isotopes suivants qui nous ont été fournis par le Commissariat à l'Energie Atomique : Rb^{86} , Fe^{59} , Zn^{65} , Co^{60} , Na^{24} .

Pour chaque mesure effectuée nous avons indiqué les différentes valeurs admises pour l'énergie de ces rayonnements. Comme nous l'avons déjà signalé, l'énergie intéressante est non pas celle du photon incident mais celle de la paire d'électrons $k-2$, dont la précision est évidemment beaucoup moins bonne :

$$\frac{\Delta(k-2)}{k-2} = \left(\frac{\Delta k}{k} \right) \frac{k}{k-2}$$

Cette incertitude atteint 8% pour le photon le plus énergi-

que du Fe^{59} et 10 % pour le Zn^{65} , et reste de l'ordre de 1 % pour les autres énergies.

b) Efficacités

Le facteur K dépend de l'énergie par l'intermédiaire du coefficient d'absorption μ_0 , de la distance x_0 séparant la source de la face avant du scintillateur central, et de l'efficacité $S(x)$.

L'influence des deux premiers facteurs sur la précision de K est négligeable, et il suffit d'évaluer l'erreur faite sur $S(x)$.

La mesure de $S(x)$ ayant nécessité la réalisation d'un absorbant identique au scintillateur central, la mesure d'un certain taux de coïncidences ainsi que l'activité d'un échantillon de Cu^{64} , ne permet certainement pas d'obtenir une précision meilleure que $5 \cdot 10^{-2}$

$$\frac{\Delta K}{K} \approx \frac{\Delta S}{S} = 5 \cdot 10^{-2}$$

c) Flux incident $I_0 = I \Omega (4\pi)^{-1}$

L'activité I de chaque source (relative au rayonnement considéré) a été déterminée à partir du spectre direct obtenu dans un scintillateur de $2'' \times 2''$, d'efficacité connue, et en général sa précision est voisine de $3 \cdot 10^{-2}$.

L'angle solide Ω sous lequel le centre de la source voit la face avant du scintillateur dépend de x_0 suivant la relation :

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = 2 \frac{\Delta x_0}{x_0}$$

Dans nos mesures la source étant placée entre 20 et 40 cm du scintillateur, une erreur expérimentale de 3 mm sur x_0 donne dans ces conditions :

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = 2 \cdot 10^{-2}$$

Il semble ainsi difficile d'évaluer le flux incident à moins de 5.10^{-2} .

d) Taux de comptage

Nous donnons plus loin le spectre obtenu avec chaque isotope.

Le taux R est donné par l'aire du pic de paires, mais cette évaluation est rendue délicate par l'existence d'un bruit de fond qu'on ne peut estimer qu'approximativement. Ce bruit de fond pouvant être réduit par une meilleure protection des scintillateurs latéraux, nous avons utilisé différents collimateurs formés par des briques de Pb d'épaisseur 6 cm, percées d'orifices de diamètre variant entre 10 et 25 mm. Dans ces conditions on peut déterminer R à 4.10^{-2} près (sauf pour R_b^{86}); la durée des mesures étant choisie de façon telle que les fluctuations statistiques soient négligeables.

Pour tenir compte de la décroissance des isotopes, il a fallu ramener le nombre de coups R_0 obtenu pendant la durée t de la mesure, au taux R à l'instant initial :

$$R = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda t}} R_0$$

La précision sur la période était suffisamment bonne pour ne pas entraîner d'incertitude supplémentaire.

En définitive les considérations précédentes montrent qu'en général on a :

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{\Delta I_0}{I_0} + \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta R}{R} \approx 15.10^{-2}$$

II - Résultats

a) Mesures effectuées avec Zn^{65}

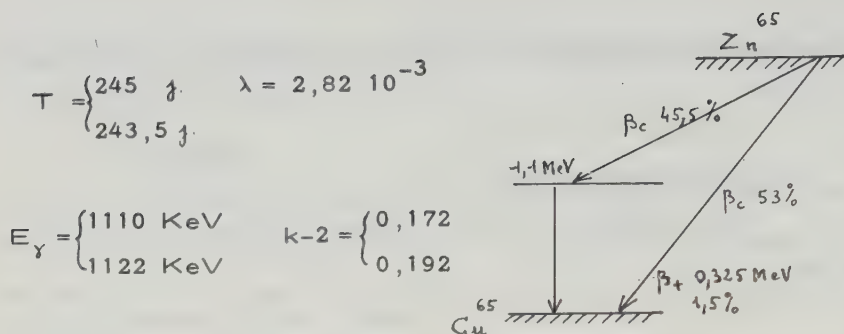


Figure II-22

La source liquide employée était une solution de Cl_2Zn enfermée dans un tube capillaire de diamètre 3 mm, suivant une hauteur de 8 mm. Son activité était de 10^7 photons émis par seconde.

Une première série de mesures employant un collimateur de longueur 12 cm, et d'orifice 20 et 10 mm, donnait le spectre (a) (Figure II.23)

$$x_0 = 16 \text{ cm}$$

$$R = 7 \text{ coups/10 minutes}$$

$$\frac{\Omega}{4\pi} = 1,56 \cdot 10^{-3} \quad \text{Exposition : 40 heures}$$

Pour diminuer le fond assez important, nous avons alors renforcé la protection des scintillateurs par l'emploi d'un collimateur de 24 cm, et d'orifice 25, 20, 15, 10 mm. [spectre (b) (Figure II.23)]

$$x_0 = 26,6 \text{ cm}$$

$$R = 3,19 \text{ coups/10 minutes}$$

$$\frac{\Omega}{4} = 5,68 \cdot 10^{-4} \quad \text{Exposition : 120 heures}$$

L'étude du spectre direct obtenu dans le scintillateur central montre alors une diminution de 12 % du pic photoélectrique due à l'emploi du collimateur.

On en déduit :

$$I_0 = 5 \cdot 10^3$$

La figure II.24 montre l'influence de l'atténuation du faisceau dans la cible et permet de calculer K :

$$\int e^{-\mu_0 x} S(x) dx = 2,1 \cdot 10^{-2} \quad \mu_0 = 0,2 \text{ cm}^{-1}$$

$$K = \int \frac{e^{-\mu_0 x}}{(1 + \frac{x}{x_0})^2} S(x) dx = 1,91 \cdot 10^{-2}$$

La valeur de σ s'en déduisant :

$$(II.52) \quad \sigma = 3,74 \pm 0,36 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{mol.}$$

La figure II.23 (c) représente le spectre obtenu lorsque le scintillateur central est sorti de " l'entrefer " séparant les deux scintillateurs latéraux. On a alors $S(x) = 0$ et le pic de paires disparaît. Il subsiste un fond résultant des diffusions d'un scintillateur à l'autre, mais beaucoup plus faible que celui existant en présence du pic de paires.

b) Mesures effectuées avec Na²⁴

$$T = \begin{cases} 14,90 \text{ h.} \\ 14,95 \text{ h.} \\ 15,01 \text{ h.} \end{cases} \quad \lambda = 7,7 \cdot 10^{-4} \text{ min}^{-1}$$

$$E_1 = 1,38 \text{ MeV} \quad k_{1-2} = 0,7$$

$$E_2 = 2,76 \text{ MeV} \quad k_{2-2} = 3,4$$

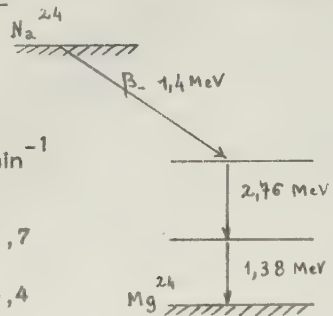


Figure II-25

La source employée était solide. Le collimateur avait 18 cm de longueur et un canal de diamètre variant de 20 à 25 mm. Les conditions géométriques :

$$x_0 = 21,2 \text{ cm}$$

$$\frac{\Omega}{4\pi} = 0,9 \text{ cm}$$

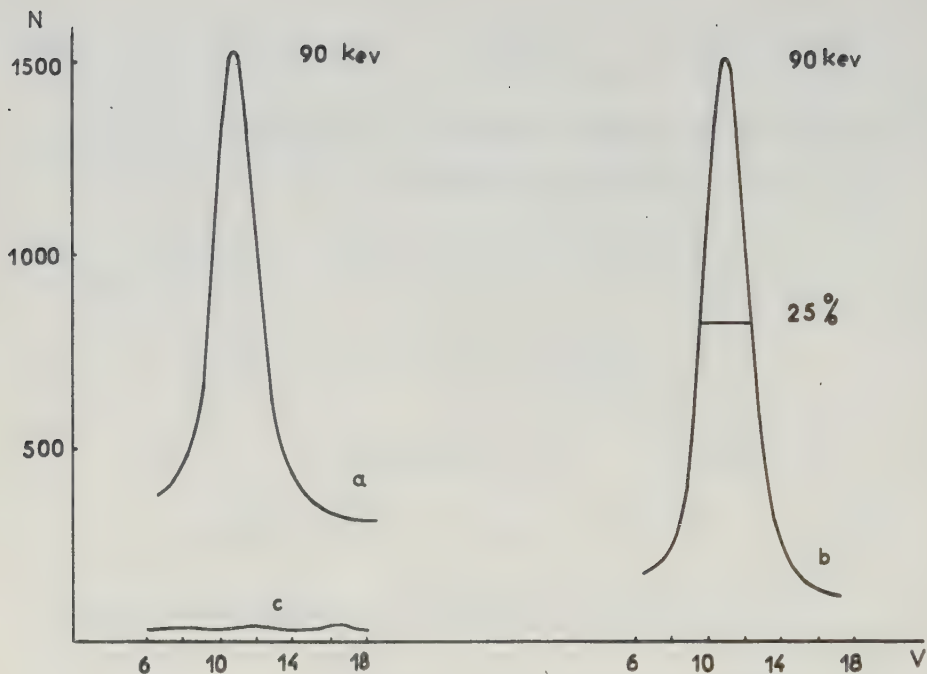


Fig. II-23 - Spectres obtenus avec une source de Zn^{65}
 (a et b) cible en position normale. Pics de paires.
 (c) cible à l'extérieur du champ d'efficacité

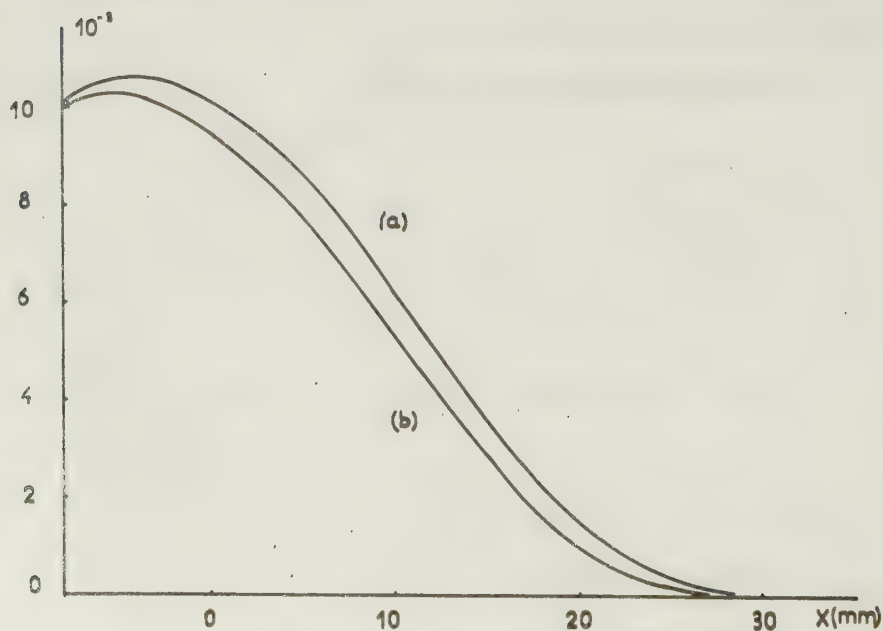


Fig. II-24 - Influence de l'atténuation du faisceau γ dans la cible.
 (a) $S(x) e^{-\mu_0 x}$ en fonction de x
 (b) $S(x) e^{-\mu_0 x} (1 + \frac{x}{x_0})^{-2}$ en fonction de x

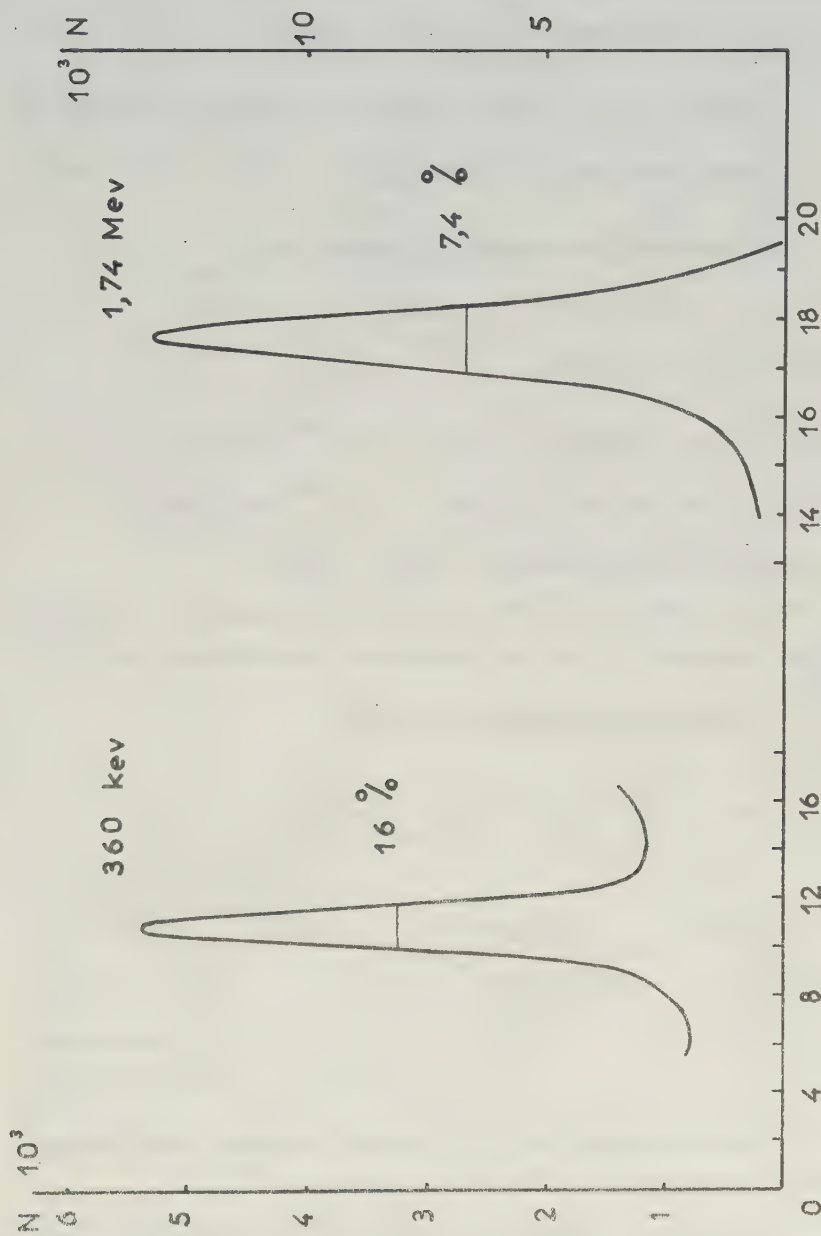


Fig. II-26 - Pics de paires du Na^{24}

Au début des mesures, $I_0 = 16,5 \cdot 10^3$ coups/seconde.

Les taux de comptage ramenés à l'instant initial :

$$R_2 = 4180 \pm 200 \quad \text{coups/10 minutes}$$

$$R_1 = 242 \pm 20 \quad \text{coups/10 minutes} \quad \text{Exposition : 45 heures}$$

$$\text{Compte tenu de } K_2 = 2,05 \cdot 10^{-2} \quad K_1 = 1,93 \cdot 10^{-3}$$

Le rapport des sections efficaces est :

$$\sigma_2/\sigma_1 = 16,14 \pm 2,4$$

Les sections obtenues :

$$(II.53) \quad \sigma_1 = 86,35 \pm 15,7 \quad 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{mol.}$$

$$(II.54) \quad \sigma_2 = 1394 \pm 190 \quad 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{mol.}$$

La figure II.26 représente le spectre fourni.

On peut remarquer que l'existence de k_2 augmente le fond du pic de paires de k_1 et par là diminue la précision sur σ_1 .

c) Mesures effectuées avec Fe^{59}

$$T = \begin{cases} 45 \text{ j} \\ 47,1 \text{ j} \end{cases} \quad \lambda = 1,54 \cdot 10^{-2} \text{ j}^{-1}$$

$$E_{\gamma_1} = \begin{cases} 1,098 \\ 1,1 \end{cases} \quad E_{\gamma_2} = \begin{cases} 1,280 \\ 1,289 \\ 1,301 \end{cases}$$

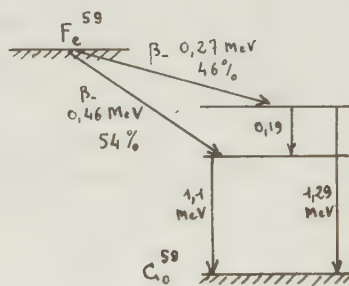


Figure II-27

La source liquide de $\text{Cl}_3 \text{Fe}$ était enfermée dans un tube capillaire analogue à celui de la source de Zn^{65} .

Nous avons successivement utilisé deux collimateurs, pour mesurer les deux sections. Au début de la mesure :

$$I(k_1) = 8,10^6 \quad \text{photons/sec.}$$

$$I(k_2) = 6,06 \cdot 10^6 \quad \text{photons/sec.}$$

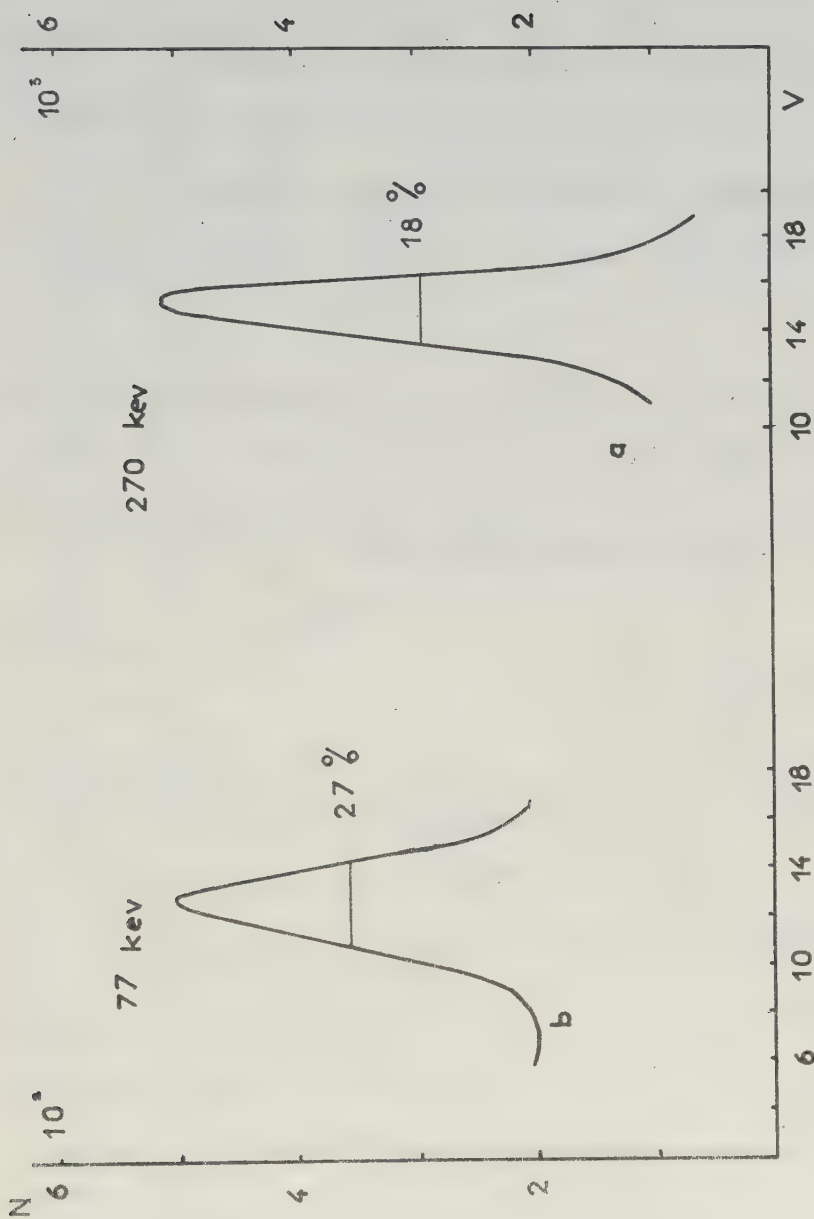


Fig. II-28 - Pics de paires du Fe^{59}

1ère mesure - (Durée 15 h.) (Figure II.28 (a))

Collimateur de 12 cm, ($\phi = 25, 25$ mm)

$$x_o = 15,9 \text{ cm}$$

$$R_2 = 72 \pm 3 \text{ coups/10 minutes}$$

$$\frac{\Omega}{4\pi} = 1,6 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_2 = 44,2 \pm 6,2 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{mol.}$$

2ème mesure - (Durée 70 h.) (Figure II.28 (b))

Collimateur de 24 cm, ($\phi = 25, 20, 15, 10$ mm)

$$x_o = 34 \text{ cm}$$

$$\frac{\Omega}{4\pi} = 4,36 \cdot 10^{-4}$$

$$R_1 = 1,1 \pm 0,05 \text{ coups/10 min.}$$

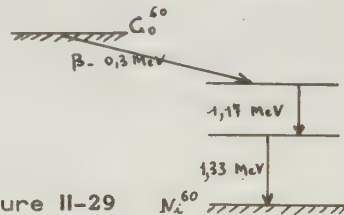
$$\sigma_1 = 2,20 \pm 0,3 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{mol.}$$

d) Mesures effectuées avec Co^{60} - Durée 5 heures

$$T = 5,24 \text{ ans}$$

$$E_{\gamma_1} = 1,172 \text{ MeV}$$

$$E_{\gamma_2} = 1,333 \text{ MeV}$$



Source solide.

Figure II-29

Collimateur de 36 cm de longueur ($\phi = 25, 25, 20, 15, 10, 10$ mm)

$$x_o = 45 \text{ cm}$$

$$R_2 = 132 \pm 5 \text{ coups/10 min.}$$

$$\frac{\Omega}{4\pi} = 0,199 \cdot 10^{-3}$$

$$R_1 = 23 \pm 2 \text{ coups/10 min.}$$

(II.57)

$$\sigma_2 = 60,5 \pm 7 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{mol.}$$

(II.58)

$$\sigma_1 = 10,56 \pm 1,9 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{mol.}$$

e) Mesures effectuées avec Rb^{86} - Durée 24 heures

$$T = 18,68 \text{ j}$$

$$E_{\gamma} = 1,08 \text{ MeV}$$

$$\beta_1 = 1,78 \text{ MeV}$$

$$\beta_2 = 0,71 \text{ MeV}$$

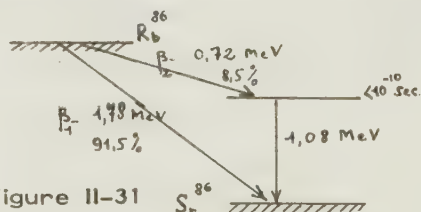


Figure II-31

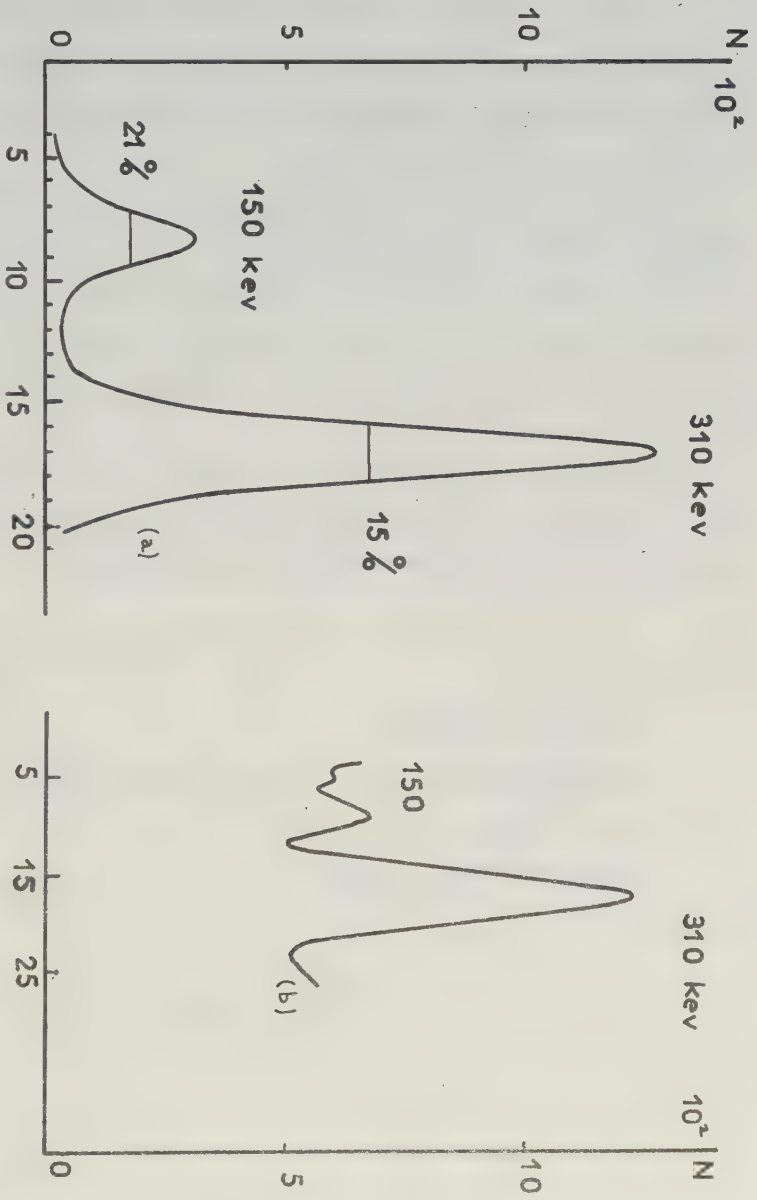


Fig. II-30 - Pics de paires du Co^{60} (a)
Pics de paires obtenus par GRIFFITHS et WARREN (b)

Collimateur de 24 cm de longueur ($\phi = 25 - 25 - 20 - 15$ mm)

$$R = 1,3 \pm 0,3 \text{ coups/10 minutes (Figure II.32)}$$

Les conditions expérimentales sont assez défavorables puisque l'émission γ intéressante ne correspond qu'à moins de 10 % de l'activité de la source.

D'autre part, la nécessité d'obtenir un pic de hauteur convenable oblige à travailler avec une T.H.T. d'alimentation du P.M. élevée (2.200 V) et on a alors constaté une fatigue du tube entraînant une diminution sensible du gain, et un manque de stabilité se traduisant par un déplacement du pic et un brouillage du spectre.

Néanmoins, le pic de paires émerge du bruit de fond, mais l'importance de ce dernier et des fluctuations statistiques ne permet qu'une précision médiocre sur la section :

$$(II.59) \quad \sigma = 1,1 \pm 0,4 \quad 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{mol.}$$

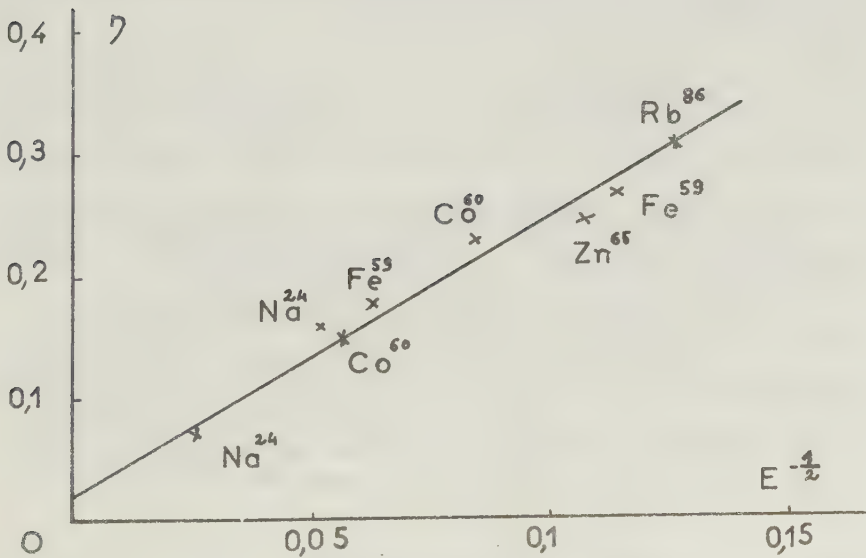
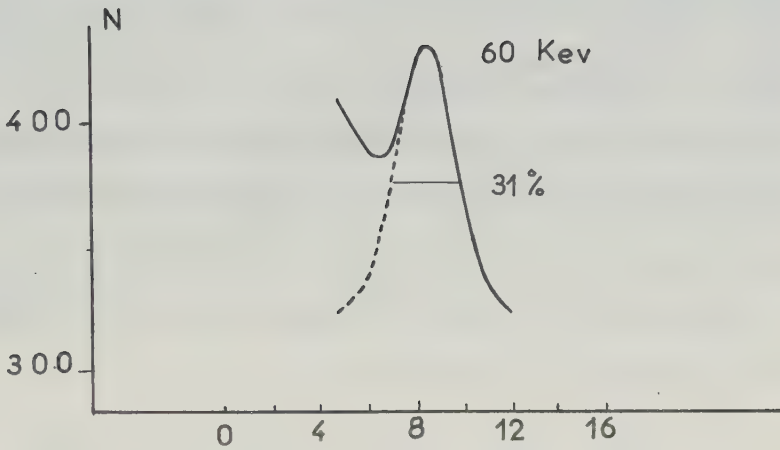
III - Tableau récapitulatif

Les différentes valeurs expérimentales de la section sont exposées dans le tableau II-6

Nous donnons en même temps la résolution des pics de paires.

Isotopes	Rb ⁸⁶	Fe ⁵⁹	Zn ⁶⁵	Co ⁶⁰	Fe ⁵⁹	Co ⁶⁰	Na ²⁴	Na ²⁴
Résolution du pic (10 ⁻²)	31	27	25	21	18	15	16	7,4
Section (10 ⁻²⁷ cm ² /mol.	1,1	2,2	3,74	10,56	44,2	60,5	86,35	1394

TABLEAU II - 6



Les rapports des sections obtenues avec Na^{24} et Co^{60} sont :

$$(II.60) \quad \text{Na}^{24} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 16,14 \pm 2,4$$

$$(II.61) \quad \text{Co}^{60} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 5,73 \pm 0,8$$

On peut remarquer que l'emploi d'une source émettrice de deux rayonnements introduit une précision moins bonne sur la détermination de la section relative à l'énergie la plus basse, ceci à cause du fond produit par le photon le plus énergétique.

En revanche, on obtient un rapport pratiquement indépendant de l'efficacité du spectromètre :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{o1}}{I_{o2}} \frac{K_1}{K_2} = \frac{R_2}{R_1} \frac{I_{o1}}{I_{o2}} \frac{K_2}{K_1} \approx 1$$

et qui, lorsque les photons sont émis en cascade, ne nécessite pas de mesure d'activité de la source.

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

La précision ne dépend alors que de l'évaluation du taux de comptage, c'est à dire du fond et des fluctuations.

Les seules mesures antérieures aux nôtres (GRIFFITHS, WARREN - Figure II.30) ne portaient d'ailleurs que sur ces rapports, obtenus par évaluation de l'aire des pics superposés à un fond élevé (4 fois plus important que le pic lui même pour les 150 KeV du Co^{60}) :

$$(II.62) \quad \text{Na}^{24} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 14,5 \pm 2,4$$

$$(II.63) \quad \text{Co}^{60} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 5,2 \pm 1,5$$

- Résolution du spectromètre

Quoique nous n'ayons pas travaillé avec un gain du photomultiplicateur central constant, il est cependant intéressant d'étudier la résolution des pics de paires en fonction de leur énergie $k - 2$.

Les mesures précédentes permettent de tracer la courbe d'étalonnage de l'appareil. On voit sur la figure II.33 que la résolution η dépend linéairement de $E^{-1/2}$ (E exprimé en KeV) suivant la relation :

$$(II.64) \quad \eta = 2,3 E^{-1/2} + 0,02$$

C - EXPRESSION DE LA SECTION TOTALE EN FONCTION DE L'ENERGIE

Les mesures précédentes nous permettent de connaître huit valeurs expérimentales de la section totale, dans une région où l'approximation de BORN n'est pas valable et où nous connaissons deux valeurs théoriques calculées d'après une méthode d'ondes partielles (Tableau I.III) soit au total dix points.

On constate (Tableau II.VII) que le rapport entre ces valeurs et celles de la section σ_B calculée d'après la théorie de BETHE HEITLER (I.49) décroît lorsque l'énergie augmente, et tend vers une valeur limite qui pour des énergies suffisamment grandes (approximation de BORN valable) est égale à un.

$k-2$	0,114	0,151	0,18	0,192	0,5	0,52	0,598	0,7	1	3,4
σ/σ_B	1,99	1,76	1,8	1,39	1,44	1,3	1,3	1,28	1,38	1,12

TABLEAU II.VII

Il est intéressant de pouvoir exprimer ce rapport en fonction de l'énergie, et nous avons cherché si un développement suivant les puissances de $(1/k-2)$ était susceptible de le représenter. Remarquons tout de suite que si un tel développement existe dans la région que nous avons étudiée, il ne pourra pour être valable également à l'origine ($k = 2$) comporter de puissances supérieures à 2, puisque nous avons vu que σ_B est de la forme $(k-2)^3$ quand $k \rightarrow 2$.

L'utilisation de la méthode des moindres carrés nous a alors permis d'établir la relation :

$$(II.65) \quad \boxed{\frac{\sigma}{\sigma_B} = 1 + \frac{d}{k-2}} \quad d = 0,202 \text{ pour } Z = 53$$

L'écart quadratique moyen entre les valeurs σ données et les valeurs calculées en utilisant (II.65) est alors égal à 13,6 %, et il est remarquable qu'il soit nettement plus grand (20,5 %, 28 %) quand on cherche à ajuster σ/σ_B suivant des polynômes en $(k-2)^{-1}$ de degrés plus élevés (2 et 3).

Nous avons reporté sur la figure II.34 la courbe représentative de σ calculée d'après (II.65). On peut remarquer que les valeurs théoriques ($k = 2,5$ et $k = 3$) sont légèrement supérieures à celles de (II.65) tandis que les mesures expérimentales aux énergies les plus basses (Rb^{86} , Fe^{59} et Zn^{65}) apparaissent au contraire inférieures.

La précision tant des mesures expérimentales que des calculs numériques ne nous permet pas d'en dire davantage, et nous nous contenterons en conclusion de souligner que l'ensemble des résultats précédents nous a permis de mettre en évidence la loi suivant laquelle la section totale de création de paires dans l'iode varie avec l'énergie.

Nous nous proposons maintenant d'examiner si l'expression (II.65) établie pour l'iode est susceptible d'être généralisée pour d'autres corps.

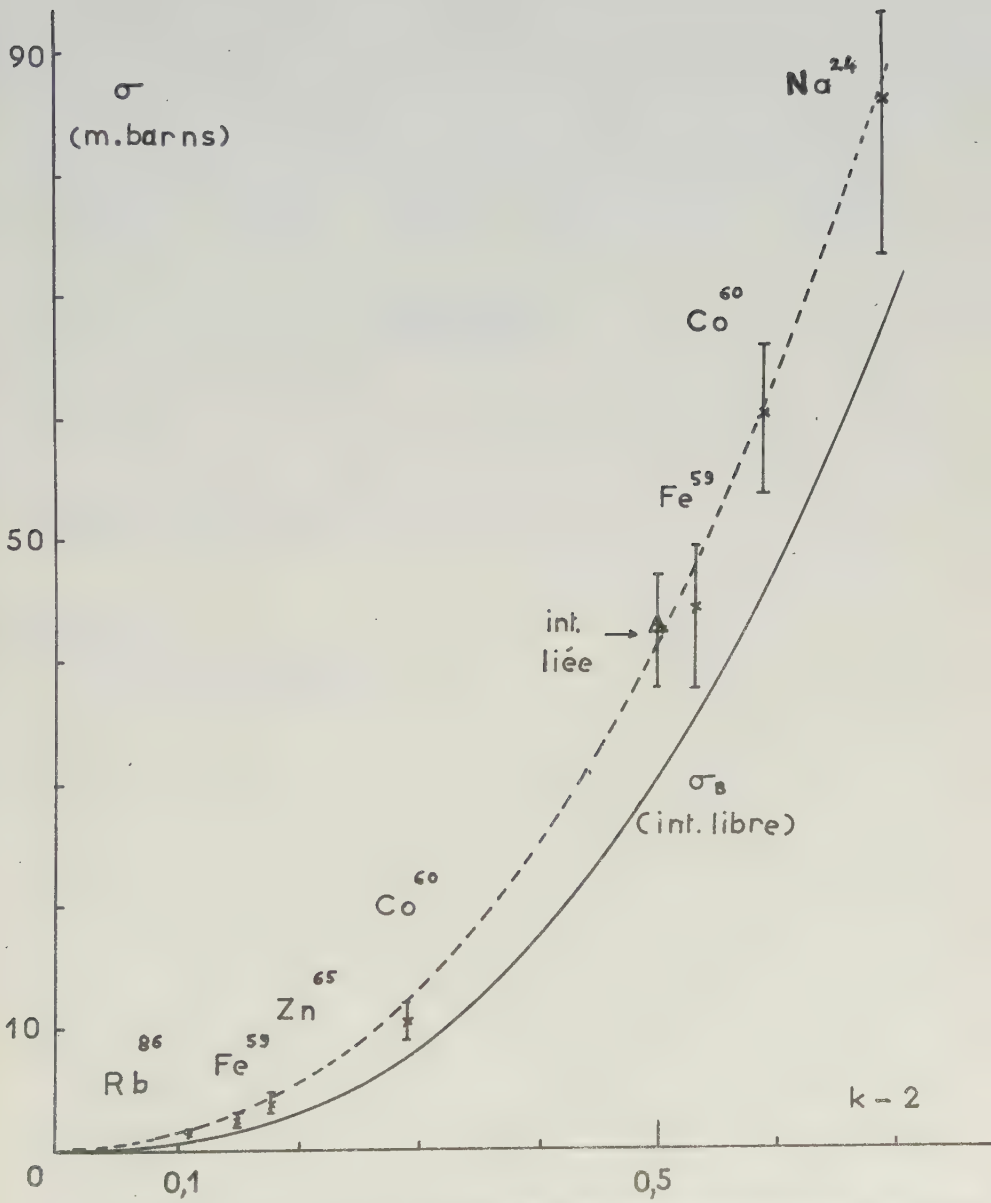


Fig. B-34 - Valeurs théoriques de la section efficace totale de production de paires et valeurs expérimentales mesurées dans l'iode.

CONCLUSION

Les mesures expérimentales de la section de création de paires dans l'iode ($Z = 53$) et leur confrontation avec les résultats théoriques obtenus par l'emploi de l'approximation de BORN et par une méthode de décomposition des fonctions d'ondes en ondes partielles, nous ont permis, à l'issue du travail que nous venons d'exposer, d'énoncer une loi de variation de la section totale en fonction de l'énergie, qui, près du seuil a la forme :

$$(III-1) \quad \sigma = \sigma_B \left(1 + \frac{d}{k-2} \right) \quad d = 0,202 \text{ pour } Z = 53$$

Il est intéressant d'étudier les possibilités de généralisation de cette expression à d'autres valeurs de Z , et pour cette raison nous sommes conduits à préciser les résultats obtenus par les différents auteurs en nous bornant, cependant au domaine d'énergie qui s'étend du seuil à quelques MeV seulement, puisqu'on sait qu'au dessus de 5 MeV (et jusqu'à 10 MeV environ) l'accord entre les mesures expérimentales et les résultats théoriques de BETHE HEITLER est excellent.

Ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction, les travaux dans ce domaine ont porté :

- sur la mesure absolue de la section dans le plomb, à des énergies différentes qui sont obtenues par l'utilisation d'isotopes émetteurs de rayonnements γ

- sur la mesure relative des variations de la section en fonction de la charge Z du noyau, à une énergie déterminée, en irradiant par un même isotope (Co^{60} , $\text{Th C}''$) des cibles de natures différentes (Al, Fe, Pb, etc....).

On peut remarquer que dans toutes ces expériences (à part celles de GRIFFITHS WARREN) la section est mesurée par la détection des deux quanta produits par l'annihilation du positon, et que la cible utilisée est une cible inerte.

I - MESURES ABSOLUES DE LA SECTION DANS LE PLOMB

Les différentes mesures de la section de création de paires d'électrons dans le plomb, à des énergies s'étendant de 1,02 à 4 MeV sont données dans le tableau III-1, dans lequel nous indiquons d'autre part la nature des émetteurs de rayonnements γ utilisés dans chaque expérience, et les auteurs de ces mesures.

Emetteur	Energie MeV	σ (cm ²)	Auteurs
Na ²⁴	2,76	$(3,43 \pm 0,7) 10^{-24}$ $(3,18 \pm 0,12) 10^{-24}$	STANDIL et autres (SH 57) SCHMID (SC 55)
Th (c'+c'')	2,6	$2,8 \cdot 10^{-24}$	HAHN et autres (HA 52)
Ra C	1,78	$1,20 \cdot 10^{-24}$	HAHN et autres (HA 52)
Co ⁶⁰	1,28	$0,144 \cdot 10^{-24}$	HAHN et autres (HA 52)
Zn ⁶⁵	1,12	$(13,4 \pm 1) 10^{-27}$ $(10,3 \pm 1) 10^{-27}$	SHKOLNIK et autres (ST 56) JENKINS (JE 56)

TABLEAU III-1

On peut remarquer que les isotopes utilisés pour effectuer ces mesures, excepté le Zn⁶⁵, émettent non pas un, mais plusieurs rayonnements d'énergies différentes susceptibles de participer à la matérialisation, et que dans ce cas l'emploi d'une cible inerte ne permet de prendre connaissance que de la somme des sections correspondantes sans pouvoir déterminer celles-ci individuellement.

Dans ces conditions il semble utile d'expliquer comment ces auteurs sont néanmoins parvenus à déterminer la section à une énergie déterminée.

Dans le cas du Na^{24} , deux énergies sont à considérer à 2,76 MeV et à 1,38 MeV, et la section à 2,76 MeV est calculée en tenant compte de la contribution du rayonnement de 1,38 MeV au moyen de la mesure de leur rapport effectuée par WEST (WE 56) :

$$(III-2) \quad \frac{\sigma(2,76)}{\sigma(1,38)} = 15 \pm 0,8$$

Les rayonnements émis par Ra C et Th (c'+c'') sont beaucoup plus complexes, et des photons de diverses énergies participent à la matérialisation. HAHN et autres (HA 52) admettent que la section mesurée expérimentalement est celle qui serait obtenue en utilisant un rayonnement monochromatique dont l'énergie serait égale à l'énergie moyenne du faisceau utilisé (RaC ou Th (c'+c'')), énergie qui est calculée en tenant compte évidemment des intensités relatives α_k des diverses composantes du faisceau. Celui-ci s'étend pratiquement de 1,5 à 2,4 MeV pour le Ra C et de 2,2 à 3,2 MeV pour le Th (c'+c''). Une telle hypothèse revient à écrire :

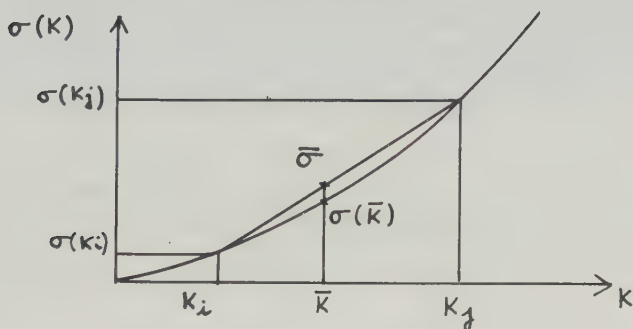
$$(III-3) \quad \bar{\sigma} = \sum_k \alpha_k \sigma_k = \sigma(\sum_k \alpha_k k) = \sigma(\bar{k})$$

C'est encore dire que la section soit linéaire en k dans la gamme d'énergie du faisceau. L'aspect de la courbe (I-3) représentative de σ_B obtenue par (I-49) justifie effectivement cette hypothèse, car on constate en effet que la section σ_B est sensiblement linéaire entre 1,8 et 3 MeV, et on peut raisonnablement admettre que ce résultat est aussi valable pour σ .

Cependant si l'on admet que la concavité de la courbe représentative de σ est analogue dans cette région à celle de σ_B , ainsi que le montrent nos propres mesures dans l'iode, on voit facilement que l'approximation linéaire de la

section, conduit nécessairement à des résultats légèrement supérieurs à la valeur réelle de σ :

$$\bar{\sigma} > \sigma(\bar{K})$$



Il est difficile d'évaluer l'erreur commise en égalant $\bar{\sigma}(k)$ et $\sigma(\bar{K})$, mais on peut penser qu'elle ne dépasse pas 2 à 3 %, et elle est donc faible par rapport aux autres facteurs déterminant la précision des résultats.

La considération du tableau (III-1) montre en effet que les mesures effectuées par des auteurs différents présentent des écarts qui peuvent être très importants dans certains cas (30 % à 1,12 MeV), et il semble bien que les difficultés d'évaluer avec une grande précision l'efficacité de détection des quanta de 511 KeV, ainsi que l'activité de la source et le bruit de fond en soient les causes principales.

II - VARIATIONS DE LA SECTION EN FONCTION DE Z

Conjointement à l'étude des variations de σ avec l'énergie, dont les résultats sont exposés dans le tableau III-1 d'autres travaux ont montré que les variations de la section avec Z ne suivaient pas exactement la loi en Z^2 prévue par la théorie de BETHE HEITLER, et que les différentes mesures de la section à une énergie déterminée (Co^{60} et Th c'') pouvaient être ajustées suivant une relation de la forme :

$$(III-4) \quad \sigma = Z^2 (1 + b Z^2) t$$

Ce résultat a été acquis en exposant des cibles de différente nature : Al Fe Cu Mn Ag Sn Pb Be C, aux rayonnements émis soit par une source de Co^{60} soit par une source de Th C'', et les valeurs du coefficient b obtenues par ces diverses mesures sont indiquées dans le tableau (III-2).

Energie	b	Auteurs
1,17 + 1,33 MeV (Co^{60})	$(1,66 \pm 0,30) 10^{-4}$	HAHN et autres (HA 52)
	$(1,59 \pm 0,13) 10^{-4}$	DAYTON (DA 53)
	$(1,55 \pm 0,1) 10^{-4}$	SCHMID et autres (SC 56)
	$(1,81 \pm 0,3) 10^{-4}$	WEST (WE 57)
	$(1,53 \pm 0,03) 10^{-4}$	STANDIL et autres (ST 58)
2,62 MeV (Th c'')	$(3,39 \pm 0,95) 10^{-5}$	DAYTON (DA 53)

TABLEAU III-2

On peut remarquer que ces mesures sont d'une part beaucoup plus précises que les mesures absolues de la section dans le plomb (tableau III-1) et que d'autre part, elles permettent de donner directement le rapport σ/σ_B sans avoir à calculer la section σ_B .

Les considérations théoriques exposées dans la première partie de ce travail (chap. I) montrent en effet qu'à ces énergies (1,33 MeV et 2,62 MeV) σ et σ_B coïncident pour les valeurs de Z les plus faibles (l'approximation de BORN est alors pleinement justifiée) et que par conséquent :

$$(III-5) \quad \sigma_B = t Z^2$$

On peut donc écrire (III-4) sous la forme (III-6)

$$(III-6) \quad \frac{\sigma}{\sigma_B} = 1 + b Z^2$$

La détermination de la constante b , permet de calculer la section σ , connaissant σ_B , mais bien entendu, la méthode utilisée ne permet pas de calculer chacune des sections séparément à 1,17 et 1,33 MeV mais seulement leur somme :

$$\sigma_1(1,17) + \sigma_2(1,33).$$

Pour calculer celle-ci nous avons adopté pour b , la valeur moyenne des différentes mesures exposées dans le tableau soit :

$$(III-7) \quad b = (1,63 \pm 0,12) 10^{-4} \text{ à } 1,17 + 1,33 \text{ MeV}$$

Le tableau I-2 fournit les valeurs σ_B en unité $\bar{\nu}$ et permet de calculer les valeurs dans le plomb, avec une certaine erreur due à la précision avec laquelle sont connues les énergies des rayonnements émis par une source de Co^{60} :

$$(III-8) \quad \sigma_{1B} + \sigma_{2B} = (124,05 \pm 2,55) 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ pour } Z = 82$$

La somme des sections σ_1 et σ_2 dans le plomb s'en déduit alors :

$$(III-9) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = (0,261 \pm 0,014) 10^{-24} \text{ cm}^2 \text{ pour } Z = 82$$

On peut remarquer que la détermination de b par cette méthode offre la possibilité de connaître la section avec une précision bien meilleure que celle obtenue en la mesurant dans le plomb ou dans l'iode par exemple.

Ceci est dû au fait que les mesures de b sont des mesures relatives, et que par là même, elles ne nécessitent ni la détermination de l'efficacité de détection des rayonnements d'annihilation, ni la détermination de l'activité de la source.

Ces deux paramètres restent en effet constants pendant toute la durée de l'expérience, au cours de laquelle les seules modifications qui interviennent consistent à changer la nature de la cible. Il suffit donc pour ajuster les résultats suivants (III-4) de connaître seulement le nombre de noyaux de chaque cible qui sont exposés au rayonnement incident.

III - EXPRESSION GENERALE DE LA SECTION EN FONCTION DE Z ET k

Nous connaissons maintenant les variations de la section en fonction de l'énergie pour une valeur de Z déterminée (III-1) et en fonction de Z pour deux valeurs de l'énergie (III-6) :

$$(III-1) \quad \sigma(k, Z_0) = \sigma_B \left(1 + \frac{d}{k-2} \right) \text{ Avec } d = 0,202 \text{ pour } Z = 53$$

$$(III-6) \quad \sigma(k_0, Z) = \sigma_B (1 + b Z^2) \text{ Avec } b = \begin{cases} 3,39 \cdot 10^{-5} & k = 2,62 \text{ MeV} \\ 1,63 \cdot 10^{-4} & k = 1,17 + 1,33 \text{ MeV} \end{cases}$$

Si nous admettons la validité simultanée de ces deux relations, nous devons obtenir la forme suivante (III-10) de σ en fonction de Z et k :

$$(III-10) \quad \sigma = \sigma_B \left(1 + \frac{a}{k-2} Z^2 \right)$$

Le calcul de a (constante indépendante de k et de Z) à partir des données expérimentales, doit nous permettre de tester la validité de l'expression (III-10).

Nos propres mesures dans l'iode déterminent d'ailleurs immédiatement ce coefficient puisque $a = d/Z^2$.

Il n'en est pas tout à fait de même des mesures dans le plomb et nous avons d'abord procédé à l'établissement d'une relation de type (III-1) pour $Z = 82$.

1 - Détermination de d pour Z = 82

Nous avons cherché à exprimer le rapport σ/σ_B mesuré dans le plomb suivant un polynôme en $1/k-2$, utilisant une méthode analogue à celle que nous avons utilisée pour l'iode :

k	1,18	2,5	3	3,5	5,1	5,13	5,2	5,4
σ/σ_B	2,45	2,08	2	1,58	1,33	1,22	1,18	1,16

Les différentes valeurs peuvent être ajustées suivant la relation (III-11)

$$(III-11) \quad \frac{\sigma}{\sigma_B} = 1 + \frac{d}{k-2} \quad d = 0,668 \quad \text{pour } Z = 82$$

On constate que l'écart le plus important entre le rapport expérimental et le rapport calculé par (III-11) est obtenu pour $k = 1,18$ (énergie du Zn^{65}), la section expérimentale est pour cette valeur nettement plus faible que celle calculée par (III-8). A l'exception de ce point, l'accord entre (III-11) et les valeurs du tableau III-1 peut être considéré comme satisfaisant.

2 - Détermination de a

Les mesures effectuées dans le plomb, et dans l'iode nous donnent la valeur du coefficient a :

$$(III-12) \quad a = \frac{d}{Z^2} = \begin{cases} (9,93 + 2,98) 10^{-5} & \text{pour } Z = 82 \\ (7,20 + 3,6) 10^{-5} & \text{pour } Z = 53 \end{cases}$$

A ces mesures il faut adjoindre la détermination de a au moyen de la formule (III-6) qui donne les variations de la section en fonction de Z, pour les deux énergies du Co^{60} :

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_{1B} + \sigma_{2B}} = 1 + b Z^2$$

En admettant que σ obéisse effectivement à la relation (III-10) on démontre facilement que :

$$(III-13) \quad a = \left(\frac{\sigma_{1B}}{\sigma_{1B} + \sigma_{2B}} \frac{1}{k_1 - 2} + \frac{\sigma_{2B}}{\sigma_{1B} + \sigma_{2B}} \frac{1}{k_2 - 2} \right)^{-1} b$$

Le rapport des valeurs de la section de BETHE HEITLER, se calcule d'après le tableau 12:

$$\frac{\sigma_{1B}}{\sigma_{1B} + \sigma_{2B}} = 0,142 \pm 0,006$$

$$\frac{\sigma_{2B}}{\sigma_{1B} + \sigma_{2B}} = 0,858 \pm 0,034$$

et la valeur de a est calculée en adoptant pour b la valeur moyenne $b = (1,63 \pm 0,12) 10^{-4}$, soit :

$$(III-14) \quad a = (8,49 \pm 1,10) 10^{-5}$$

L'examen des valeurs de a obtenues par les méthodes différentes de mesures de la section à Z constant (Plomb et Iode) et à k constant (énergie du Co^{60}) permet de constater qu'il n'y a pas incompatibilité entre elles et par conséquent assure la validité de l'expression (III-10) dans laquelle a est une constante indépendante de k et Z.

Nous avons donc déterminé la valeur moyenne de a en tenant compte de l'ensemble de toutes les mesures (10 points dans l'iode, 8 dans le plomb et 2 à énergie constante) ajustées selon la méthode des moindres carrés ; on obtient :

$$\sigma(k, Z) = \sigma_B \left(1 + \frac{a}{k-2} Z^2 \right)$$

(III-15)

$$\text{Avec} \quad a = (8,42 \pm 3,23) 10^{-5}$$

Le tableau III-3 donne l'écart entre les mesures de la section et les valeurs calculées d'après (III-15) qui sont aussi portées sur les figures III-1 et III-2.

k-2	0,114	0,151	0,180	0,292	0,500	0,520	0,598	0,7	1	3,4
$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} (10^4)$	34,9	31,2	22	23	2,5	10	6	4	12	5

Ecart entre les valeurs σ expérimentales et celles calculées d'après (III-15) dans l'iode.

$k - 2$	0,18	0,5	1	1,5	3,1	3,13	3,2	3,4
$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} (10^3)$	41,17	2	28	15	6	3	1	1

Ecart entre les valeurs σ expérimentales et celles calculées d'après (III-15) dans le plomb.

TABLEAU III-3

L'écart quadratique moyen entre σ calculé par (III-15) et σ exp. est de 17,8 %. Cependant il est visible que cette valeur est due en grande partie aux écarts importants que l'on observe pour les énergies les plus basses, celles du Rb^{86} (iode) et du Zn^{65} (Pb). C'est ainsi que l'élimination de ces deux mesures diminue nettement l'écart quadratique moyen dont la valeur n'est plus que de 12,95 %, et laisse supposer que l'expression (III-15) n'est pas valable pour les énergies ne dépassant pas le seuil de production d'environ 60 à 100 KeV, tandis que pour des énergies plus élevées, l'accord entre les valeurs obtenues par (III-15) et les divers résultats théoriques et expérimentaux est acceptable compte tenu de la précision des mesures. Nous pouvons remarquer en particulier que le point que nous avons calculé se place parfaitement sur la courbe (II-2).

IV - CONCLUSION

Nous avons mentionné dans l'introduction qu'il existait un domaine de basse énergie, où les mesures expérimentales de la section totale de création de paires d'électrons par un rayonnement γ étaient en désaccord avec les résultats prévus par la théorie de BETHE HEITLER, théorie établie en utili-

sant l'approximation de BORN et qui ne peut donc être valable près du seuil de production.

La considération des résultats expérimentaux que nous avons obtenus en mesurant la section totale dans l'iode à diverses énergies, et des résultats obtenus par différents auteurs dans le plomb, et la confrontation de ces résultats avec les valeurs numériques de la section calculée d'après une théorie n'utilisant pas l'approximation de BORN, nous ont permis d'établir une relation où la section σ peut être exprimée en fonction de la section σ_B de BETHE HEITLER :

$$(III-15) \quad \sigma = \sigma_B \left(1 + \frac{a Z^2}{(k-2)} \right) \text{ Avec } a = (8,42 \pm 3,23) 10^{-5}$$

Nous avons d'autre part montré que la section σ_B pouvait être représentée (jusqu'à 10 MeV environ) par une expression très simple en fonction de l'énergie k et de Z :

$$(III-16) \quad \sigma_B = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{k-2}{k} \right)^3 \left(1 + \frac{k-2}{8} - \frac{(k-2)^2}{400} \right) \bar{\varphi} \quad \bar{\varphi} = \alpha Z^2 r_0^2$$

L'ensemble de ces deux relations (III-15) et (III-16) montre que l'expression donnant σ ne fait intervenir que les seuls paramètres k et Z qui déterminent le phénomène de production de paires dans un champ coulombien pur.

Il semblerait que la présence du terme en Z^2 puisse être expliquée par une méthode d'approximation traitant le potentiel coulombien comme une perturbation jusqu'au 2ème ordre. On peut signaler à ce propos, que des travaux très récents utilisant l'approximation de BORN à des ordres supérieurs, ont permis d'établir le développement suivant les puissances de Z de la section différentielle de production interne de paires (LO 63) et de la section différentielle de production des positons émis à 90° d'un rayonnement primaire γ (MO 63, PL 63).

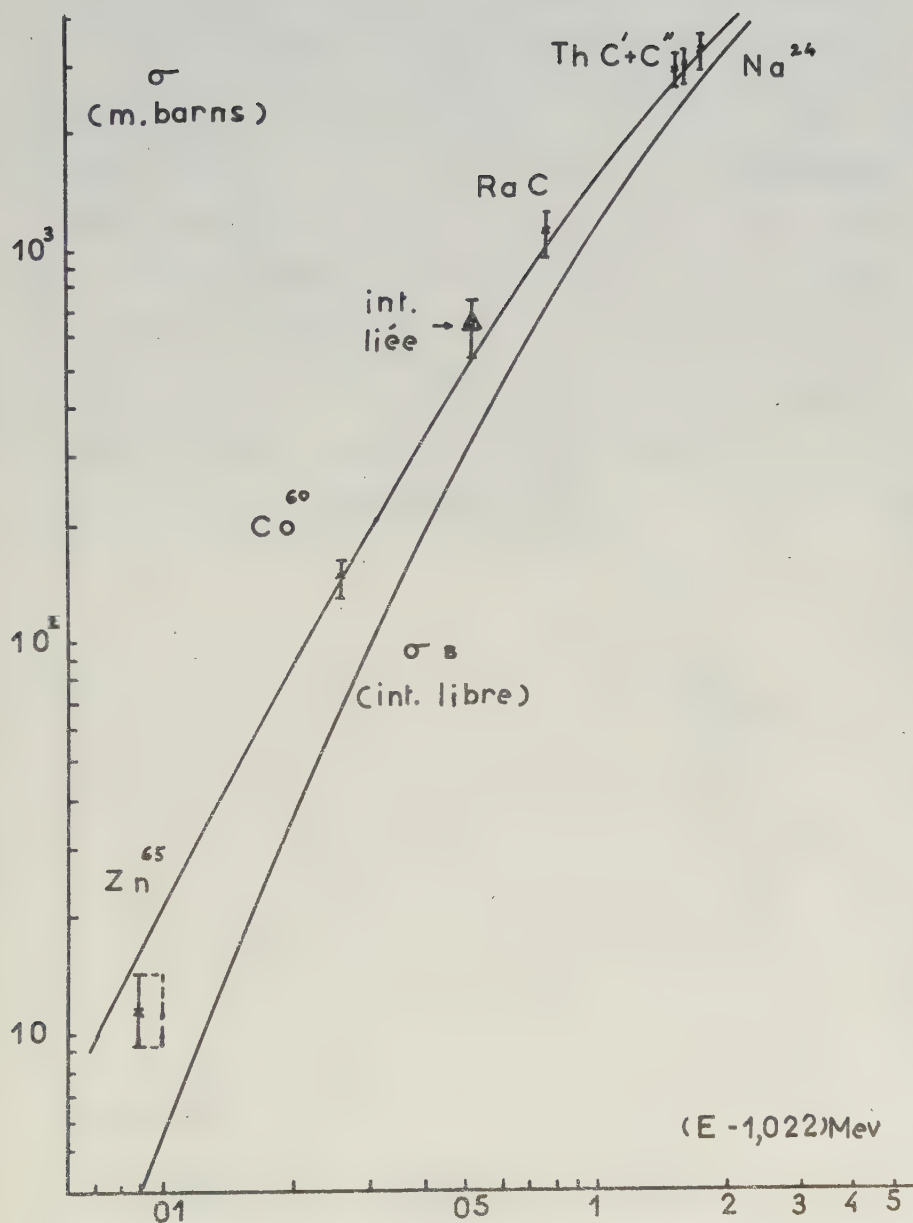


Fig.III-1 - Valeurs de la section efficace totale de création de paires dans le plomb : - théoriques (interaction libre, liée)
 - expérimentales
 - calculées d'après (III-15)

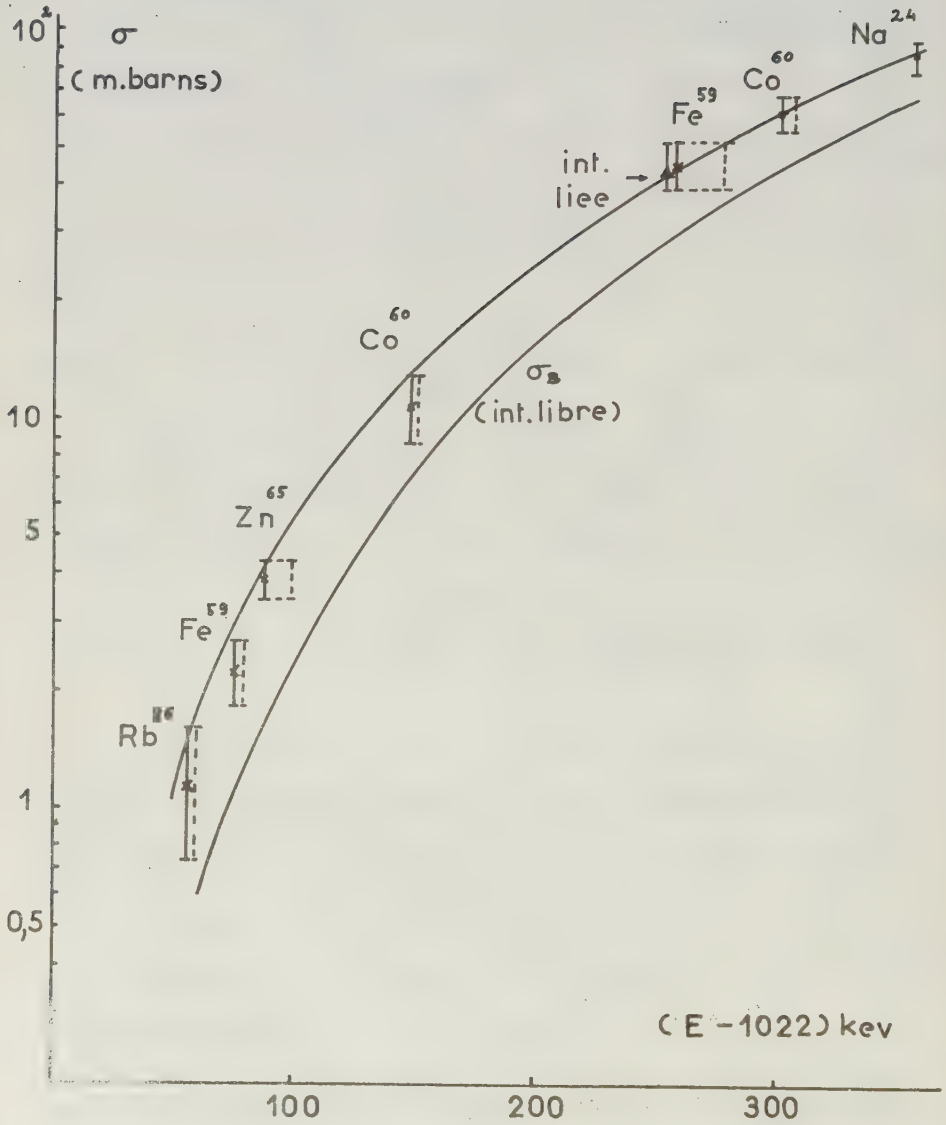


Fig.III-2 - Valeurs de la section efficace totale de creation de paires dans l'Iode : - théoriques (interaction libre, liée)
- expérimentales
- calculées d'après (III-15)

Ces calculs sont très compliqués et nécessitent pour chaque valeur de l'énergie incidente une résolution numérique qui est elle aussi fort longue, mais surtout ils présentent le désavantage (caractéristique de l'approximation de BORN) de n'être pas valables dans le voisinage immédiat du seuil de production.

Pour cette raison, nous ne pensons pas que cette méthode présente de l'intérêt dans le domaine que nous avons étudié. Par contre, nous avons vu (première partie) que le traitement du phénomène de création de paires en interaction liée et l'utilisation d'une décomposition des fonctions d'ondes en ondes partielles permettait de calculer la section sous forme numérique et que les résultats étaient en accord avec (III-15).

REFERENCES

- (AD 48) ADAMS
Phys. Rev., 74 - 1707-(1948)
- (AL 35) ALICHANOW - ALICHANIAN - KOSODAEW
Nature, 136 - 475-(1935)
- (AL 36) ALICHANIAN - ALICHANOW - ARZIMOVITCH
Nature, 137 - 703-(1936)
- (ANa32) ANDERSON
Phys. Rev., 41 - 405-(1932)
- (ANb 33) ANDERSON et NEDDERMEYER
Phys. Rev., 43 - 1034-(1933)
- (BE 42) BERINGER et MONTGOMERY
Phys. Rev., 61 - 222-(1942)
- (BE 53) BERMAN
Phys. Rev., 90 - 210-(1953)
- (BE 34) BETHE - HEITLER
Proc. Roy. Soc., A 146 - 83-(1934)
- (BE 52) BETHE - MAXIMON
Phys. Rev., 87 - 156-(1952)
- (BI 54) BIRKS
Scintillation counters - London Pergamon Press LTD
(1954)
- (BJ 58) BJORKEN - DRELL - FRAUTSCHI
Phys. Rev., 112 N° 4 - 1409-(1958)
- (BO 47) BORSELLINO
Helv. Phys. Acta, 20 - 136-(1947)
Nuovo Cimento, 4 - 112-(1947)
- (BR 57) BRABANT - KENNEY - WALLACE
Phys. Rev., 107 - 604-(1957)
- (BU 57) BUMILLY - CHAMBERS - HOFSTADTER
Bull. Am. Phys. Soc., II - 390 - (1957)
- (CO 52) COLGATE
Phys. Rev., 87 - 592 - (1952)
- (DA 28) DARWIN
Proc. Roy. Soc., A 118 - 654 - (1928)
- (DA 52) DAVIES - BETHE
Phys. Rev., 87 - 157 - (1952)
- (DA 54) DAVIES - BETHE - MAXIMON
Phys. Rev., 93 - 768, 788 - (1954)

- (DA 51) DAVISSON - EVANS
Phys. Rev., 81 - 404 - (1951)
- (DA 53) DAYTON
Phys. Rev., 89 - 544 - (1953)
- (DE 51) DE WIRE - ASHKIN - BEACH
Phys. Rev., 83 - 505 - (1951)
- (DI 47) DIRAC
The principles of quantum mechanics - Oxford (1947)
Clarendon Press
- (DZ 61) DZHELEPOV - PECKER
Decay schemes of radioactive nuclei - Pergamon Press
(1961)
- (EM 52) EMIGH
Phys. Rev., 86 - 1028 - (1952)
- (FE 61) FEYNMAN
Quantum Electrodynamics - Benjamin, Inc. New York
(1961)
- (FR 52) FRASER
Phys. Rev., 87 - 522 - (1952)
- (FU 34) FURRY
Phys. Rev., 46 - 391 - (1934)
- (GR 52) GRIFFITHS - WARREN
Proc. Phys. Soc., A 65 - 1050 - (1952)
- (HA 52) HAHN - BALDINGER - HUBER
Helv. Phys. Acta, 25 - 505 - (1952)
- (HE 54) HEITLER
The quantum theory of radiation - Oxford - Clarendon
Press (1954)
- (HO 50) HOFSTADTER - Mac INTYRE
Phys. Rev., 78 - 619 - (1950)
- (HO 48) HOUGH
Phys. Rev., 73 - 266 - (1948)
- (HU 58) HUCK
Thèse 3ème Cycle - LYON - (1958)
- (HU 59) HUCK
Journ. Phys. Rad., 20 - 917 - (1959)
- (JA 36) JAEGER - HULME
Proc. Roy. Soc., A 153 - 443 - (1936)
- (JE 56) JENKINS
Bull. Amer. Phys. Soc., 167 - (1956)
- (JO 33) JOLIJOT
C.R., 197 - 1622 - (1933)
- (JO 34) JOLIJOT
C.R., 198 - 81 - (1934)

- (SC 55) SCHMID
Helv. Phys. Acta, 28 - 369 - (1955)
- (SC 54) SCHMID - HUBER
Helv. Phys. Acta, 27 - 152 - (1954)
- (SH 57) SHKOLNIK - STANDIL
Can. Jour. of Phys., 35 - 1156 - (1957)
- (SI 55) SIEGBAHN
 β and γ ray spectroscopy, North-Holl. Pub.
C. Amsterdam - (1955)
- (ST 58) STANDIL - SHKOLNIK
Can. Jour. of Phys., 36 - 1154 - (1958)
- (ST 56) STANDIL et MORE
Can. Jour. of Phys., 34 - 1126 - (1956)
- (TH 33) THIBAUD
C.R., 197 - 1629 - (1933)
- (TH 34) THIBAUD
Phys. Rev., 45 - 781 - (1934)
- (TR 60) TRICOMI
Fonctions hypergéométriques confluentes. Mémorial
des sciences mathématiques - Gauthier-Villars -
PARIS - (1960)
- (VO 48) VOTRUBA
Phys. Rev., 73 - 1468 - (1948)
- (WA 47) WATSON
Phys. Rev. 72 - 1060 - (1947)
- (WA 49) WALKER
Phys. Rev. 76 - 527 - (1949)
- (WE 34) WEISZÄCKER - WILLIAMS
Z. Phys., 88 - 612 - (1934)
- (WE 56) WEST
Phys. Rev., 101 - 915 - (1956)
- (WH 39) WHEELER - LAMB
Phys. Rev., 55 - 858 - (1939)

- (JO 58) JOSEPH - ROHRLICH
Rev.Mod.Phys., U.S.A., 30 N° 2, Part.I - (1958)
- (JO 50) JOST - LUTTINGER - SLOTNICK
Phys. Rev., 80 - 189 - (1950)
- (KL 34) KLEMPERER
Proc.Camb.Phil.Soc., 30 - 347 - (1934)
- (LA 58) LANDAU - LIFSHITZ
Quantum Mechanics - Pergamon Press (1958)
- (LA 49) LAWSON
Phys. Rev., 75 - 433 - (1949)
- (LE 54) LEWIS - WELLS
Millimicrosecond Pulse Techniques - London - Pergamon Press - (1954)
- (LI 51) LINDSTROM
Festschrift Manne Sieghahn - (1951)
- (LO 63) LOMBARD - BORS
Nuclear Physics, 48 - 333 - (1963)
- (ME 59) MESSIAH
Mécanique quantique - Dunod - PARIS - (1959)
- (MO 47) MOLIERE
Z. Naturforsch., 2 a - 133 - (1947)
- (MO 63) MOROI - HAMMER
Nuovo Cimento, 30 - 1396 - (1963)
- (NE 47) NEMIROVSKY
J.Phys. (USSR), II - 94 - (1947)
- (NI 34) NISHINA - TOMONAGA - SAKATA
Scient.Pap.Inst.Phys.and Chem.Research
Japon Suppl., 24 N° 17 - (1934)
- (OL 57) OLSEN - MAXIMON - WERGELAND
Phys. Rev., 106 - 27 - (1957)
- (PL 63) PLIMPTON - HAMMER
Nuovo Cimento, 30 - 1249 - (1963)
- (RA 34) RACAH
Nuovo Cimento, 11 - 7 - (1934)
- (RA 36) RACAH
Nuovo Cimento, 13 - 69 - (1936)
- (RO 52) ROSENBLUM - SHRADER - WARNER
Phys. Rev. 88 - 612 - (1952)
- (SA 62) SANDHU - WEBB - MOHANTY - ROY
Phys. Rev. 125 - 1017 - (1962)

TABLE DES MATIÈRES

Pages

SOMMAIRE	
----------------	--

INTRODUCTION	1
--------------------	---

- 1 - Historique
- 2 - Généralités sur la production de paires d'électrons
- 3 - Les travaux théoriques
- 4 - Les travaux expérimentaux
- 5 - Synthèse des résultats théoriques et expérimentaux

1ère Partie - ETUDE THEORIQUE

I - <u>Aspect théorique</u>	11
-----------------------------------	----

- 1 - Formalisme hamiltonien
- 2 - Résultats obtenus par l'approximation de Born
- 3 - Résultats indépendants de l'approximation de Born

II - <u>Expression de la section efficace de Bethe-Heitler en fonction de l'énergie du rayonnement γ</u>	30
--	----

- 1 - Expressions des sections efficaces différentielle et totale en fonction de k
- 2 - Applications de la relation (I-49)

III - <u>Etude de la section efficace en interaction liée par une méthode d'ondes partielles</u>	39
--	----

- 1 - Développement des fonctions d'ondes sur les harmoniques sphériques
- 2 - Expression de l'amplitude de la probabilité de transition
- 3 - Intégration angulaire
- 4 - Etude des fonctions radiales $F(r)$ et $G(r)$
- 5 - Intégration radiale. Section efficace totale.

2ème Partie - ETUDE EXPERIMENTALE

INTRODUCTION	70
--------------------	----

I - <u>Réalisation du spectromètre</u>	72
--	----

- 1 - Principe
- 2 - Détection près du seuil

- 3 - Description du spectromètre
- 4 - Sélecteurs d'amplitude
- 5 - Circuits de coïncidences
- 6 - Circuit porte

II - Détermination de la section efficace totale de création

de paires dans un cristal de NaI (TI) 79

A - Caractéristiques du spectromètre 81

- 1 - Théorie de la mesure des sections efficaces
- 2 - Détermination expérimentale de l'efficacité de détection des rayonnements d'annihilation
 - a) Efficacité de détection
 - b) Mesures effectuées avec une source de Na²²
 - c) Mesures effectuées avec une source de Cu⁶⁴
 - d) Valeurs de S (x)

B - Mesures des sections efficaces 105

1 - Influence des différents paramètres

2 - Résultats

- a) Mesures effectuées avec une source de Zn⁶⁵
- b) " " " " " Na²⁴
- c) " " " " " Fe⁵⁹
- d) " " " " " Co⁶⁰
- e) " " " " " Rb⁸⁶

3- Tableau récapitulatif

C - Expression de la section efficace totale en fonction de l'énergie 119

CONCLUSION 123

- 1 - Mesures absolues de la section efficace dans le plomb
- 2 - Variations de la section efficace en fonction de Z
- 3 - Expression générale de la section efficace totale en fonction de Z et de k
- 4 - Conclusion

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

" Les pôles de REGGE et l'expérience "

LES Vu :

Les Membres du Jury

A. SARAZIN

G. PHILBERT

J. LAFOUCRIERE

M. MAITROT

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. BRACONNIER

Vu et accordé le permis d'imprimer :

Lyon, le 25 Mai 1964

Le Recteur,
Président du Conseil de l'Université

P. LOUIS

